GEOMETRIA 2

Test prova del 5 Giugno 2020 - Soluzioni

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (almeno una lo è)

1. In $\mathbb{E}^2$, riferito ad un sistema di coordinate ortonormale, si considerino il punto $F \equiv (1,1)$, la retta r di equazione $x+y+1=0$ e il luogo Γ descritto dai punti $P \in \mathbb{E}^2$ tali che $d(P,F) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, d(P,r)$, dove d denota la distanza euclidea. Allora

   a) Γ è un'ellisse passante per l'origine.

   b) Γ è un'ellisse avente la retta di equazione $x-y=0$ come asse di simmetria.

   c) Γ ha centro nel punto $B \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   d) Il fascio di coniche generato da Γ e dal cerchio γ di centro F e raggio $\sqrt{2}$ contiene esattamente una parabola.

   Risposta. Le risposte corrette sono (b) e (d). La definizione di Γ è data usando la costruzione di una conica mediante fuoco, direttrice ed eccentricità, con l'eccentricità $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Essendo $0 < e < 1$ si ha che Γ è un ellisse. Si vede facilmente che l'origine non appartiene a Γ poichè non ne soddisfa la condizione, quindi (a) è falsa. La retta di equazione $x-y=0$ è ortogonale alla direttrice e passa per il fuoco, quindi è asse di simmetria, ovvero (b) è corretta. Il punto $B \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è posto fra il fuoco e la direttrice, quindi non può essere il centro, ovvero (c) è falsa. Per dimostrare che (d) è vera, si può ragionare come segue. Dalla condizione che definisce Γ si ricava la sua equazione nel sistema di riferimento dato

   $$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 10x - 10y + 7 = 0$$

   Similmente l'equazione del cerchio γ è

   $$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

   Prediamo una combinazione lineare di queste due equazioni per ottenere il fascio

   $$(3+\alpha)x^2 + (3+\alpha)y^2 - 2xy - 2(\alpha+5)x - 2(\alpha+5)y + 7.$$

   Condizione necessaria affinchè una conica sia una parabola è che $I_2 = 0$. In questo caso $I_2 = (3+\alpha)^2 - 1$, che si annulla per $\alpha = -2$ o -4. Nel caso $\alpha = -2$ abbiamo anche che $I_3 \neq 0$ e quindi la conica è effettivamente una parabola, mentre se $\alpha = -4$ la conica è riducibile, infatti $I_3 = 0$.

   Come soluzione alternativa, si potevano scrivere le equazioni rispetto ad un sistema di riferimento diverso: quello che ha per origine il centro dell'ellisse e per asse delle x la retta per F, ortogonale alla direttrice. In questo caso l'ellisse Γ avrà come equazione la sua equazione canonica

   $$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

   per valori opportuni di a e b che non è necessario conoscere. Il fuoco avrà coordinate $F = (-f, 0)$ per qualche $f \neq 0$. Quindi γ ha equazione

   $$\gamma : (X+f)^2 + Y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad X^2 + Y^2 + 2fX + f^2 - 2 = 0.$$

   Il fascio si ottiene da una combinazione lineare di queste equazioni. L'unico modo per ottenere una parabola è facendo annullare il coefficiente di X^2, ovvero con la combinazione lineare "$a^2\Gamma - \gamma$".

2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice 4×4

$$M_f = \begin{pmatrix} A & U \\ O & B \end{pmatrix}$$

dove O è la matrice nulla, A e B sono due matrici di taglia 2×2 nilpotenti non nulle, e $U \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$.

a) M_f è una matrice non nilpotente.

b) M_f è una matrice nilpotente con ordine di nilpotenza strettamente maggiore di 2.

c) Il polinomio caratteristico di M_f è il prodotto dei polinomi caratteristici di A e di B.

d) M_f non è diagonalizzabile.

Risposta. Le risposte corrette sono (c) e (d). Si vede facilmente (c) è vera. Poichè A e B sono nilpotenti, il polinomio caratteristico di M_f è t^4. In particolare, poichè ogni matrice soddisfa il proprio polinomio caratteristico, M_f è nilpotente (quindi (a) è falsa). Mentre (d) è vera perchè nessuna matrice nilpotente e non nulla può essere diagonalizzabile. Infine (b) è falsa infatti

$$(M_f)^2 = \begin{pmatrix} A^2 & AU + BU \\ O & B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & AU + BU \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Come contro-esempio prendiamo $A = -B$ e U la matrice identità. Da cui $(M_f)^2 = 0$.

3. Data la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{pmatrix},$$

con $k \in [-1, 1]$ parametro reale. Si considerino, sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, il prodotto interno ϕ_k definito da $\phi_k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}_T A_k \mathbf{w}$, e l'endomorfismo f dato da $f(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}$ dove

$$B := \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora f è un endomorfismo simmetrico rispetto al prodotto interno ϕ_k :

a) per ogni $k \in [-1, 1]$;

b) per $k = -1$;

c) per nessun $k \in [-1, 1]$;

d) per $k = 1$.

Risposta. La risposta corretta è (b). Si ha che f è simmetrico se e solo se

$$B_T A_k = A_k B$$

Si trova che questa condizione è soddisfatta se e solo se $k = -1$.

4. In $\mathbb{E}^3$ sia τ la retta per i punti $A = (-3, 0, 6)$ e $B = (-3, -1, 5)$ e σ la retta di equazioni cartesiane $y + 1 = x + z - 1 = 0$.

a) La minima distanza tra σ e τ è $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Il piano che contiene A e la retta σ contiene anche B

c) Tra tutti i triangoli di vertici A, B e C, con C un punto sulla retta σ, quello di area minima ha area $\frac{1}{\sqrt{6}}$

d) Non esiste un piano contenente la retta τ e ortogonale alla retta σ

Risposta. Le risposte corrette sono (a), (c) e (d). Si vede facilmente che le due rette sono sghembe. Quindi (b) è certamente falsa, perchè nessun piano può contenere entrambe le rette. La (d) è vera, infatti si calcola che la direzione di τ non è perpendicolare alla direzione di σ, quindi nessun piano contenente τ può essere ortogonale a σ. La minima distanza tra σ e τ si calcola facilmente cercando, ad esempio, il piano π contenente σ e parallelo a τ e poi calcolando la distanza tra A e π usando la formula. Si trova esattamente il valore dato in (a). L'area del triangolo ABC si calcola utilizzando "base per altezza diviso due", dove per base prendiamo il lato AB. L'altezza è quindi la distanza tra C e la retta per A e B, ovvero τ. Ma il punto C varia sulla retta σ, e l'area del triangolo è minima quando è minima questa distanza. Quindi l'altezza minima coincide con la minima distanza tra σ e τ. Si calcola così che il valore dato in (c) è quello corretto,.

5. Sia A una matrice reale 3×3 e si ponga

$$(*) \qquad F_A(x_0, x_1, x_2) = A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Sia poi $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo con coordinate omogenee $(x_0 : x_1 : x_2)$.

a) $(*)$ definisce una proiettività $F_A : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$.

b) Se $\det(A) = 0$, allora esiste almeno un punto di $\mathbb{P}^2$ in cui $(*)$ non è definita.

c) $(*)$ definisce un'applicazione $F_A : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.

d) F_A definisce l'identità di $\mathbb{P}^2$ se e solo se A è la matrice identica.

Risposta. Sono corrette le risposte (b) e (c). La $(*)$ definisce una applicazione $F_A : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ se e solo se A è invertibile. Infatti dati $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ (ovvero rappresentante un punto di $\mathbb{P}^2$), $F_A(x_1, x_2, x_3)$ rappresenta un punto $\mathbb{P}^2$ se e solo se il lato destro di $(*)$ è non nullo. Quindi il nucleo di F_A (vista come applicazione lineare su $\mathbb{K}^3$) deve essere banale. Ovviamente A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$, quindi (b) e (c) sono vere, mentre (a) è falsa, poichè non sempre (*) definisce una proiettività. La (d) è falsa poichè anche un qualsiasi multiplo non nullo della matrice identica definisce l'identità di $\mathbb{P}^2$.