Breve descrizione del

CONTENUTO DELLE LEZIONI

Analisi Matematica 1 (corso B)

corso di laurea triennale in FISICA

L. Vesely, 2016–2017

Questo file dovrebbe servirvi per confrontare ciò che ho fatto a lezione con il contenuto del libro di Soardi.
Attenzione: un argomento ("compattezza in spazi metrici") verrà trattato in modo diverso, più adatto agli scopi del corso. Metterò online degli appunti su tale argomento.

26/09/2016 [1 ora: n. 1]

- Introduzione al corso: organizzazione, contenuti.

- Classi numeriche:
  - Insieme dei *numeri naturali*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
  - Insieme degli *interi nonnegativi*: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
  - Insieme dei *numeri interi (relativi)*: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
  - Insieme dei *numeri razionali*: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$.

- In realtà, ogni numero razionale ammette più di una (infinite!) rappresentazioni in forma di una frazione: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{111}{333} = \ldots$. Ma ogni numero razionale x ammette un'*unica* rappresentazione del tipo
$$x = \frac{p}{q} \quad \text{con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ primi tra loro.}$$

- *Osservazione.* Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ sono chiusi rispetto all'addizione e il prodotto, ma non rispetto alla sottrazione.
$\mathbb{Z}$ è chiuso anche rispetto alla sottrazione, ma non rispetto alla divisione.
$\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto a tutte e quattro le operazioni aritmetiche (nella divisione vengono considerati solo divisori non nulli).

- *Inclusioni delle classi numeriche:*
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$
dove $\mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali (che definiremo tra poco), e $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi (che tratteremo alla fine del corso).

  L'inclusione "$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$" va intesa in questo modo: ad ogni $n \in \mathbb{Z}$ associamo la frazione $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$, definendo così una funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Questa funzione è iniettiva (ma non suriettiva), e quindi essa definisce una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Z}$ e il sottoinsieme $f(\mathbb{Z})$ di $\mathbb{Q}$. In altre parole, l'inclusione "$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$" ha senso se identifichiamo ogni numero intero n con la corrispondente frazione $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$.

29/09/2016 [2 ore: n. 2,3]

- **Avviso.** *Ricevimento studenti regolare: mercoledì 9:30–10:30 e 14:00–15:00.*

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ *è un campo ordinato.*
[Soardi, p. 13, proprietà 1.–11.]

  Un *campo ordinato* è un insieme X su cui sono definite due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ insieme ad una relazione d'ordine $<$ [più precisamente, è una quaterna ordinata $(X, +, \cdot, <)$], avente le seguenti proprietà:
  (a) $(X, +, \cdot)$ è un *campo*, cioè: le due operazioni algebriche sono commutative e associative, ciascuna ammette un elemento neutro ($0 \in X$ per la somma, $1 \in X$ per il prodotto), ogni $x \in X$ ammette un opposto $-x \in X$ e ogni $x \in X \setminus \{0\}$ ammette un inverso $x^{-1} \in X$; inoltre le due operazioni sono legate insieme dalla legge distributiva.;
  (b) $(X, <)$ è un *insieme (totalmente) ordinato*, cioè: la relazione $<$ è transitiva e ogni due elementi $x, y \in X$ sono confrontabili (vale a dire, si verifica una e una sola tra le seguenti: $x = y$, $x < y$, $y < x$);
  (c) le operazioni algebriche e la relazione d'ordine sono legate insieme dalle seguenti due proprietà:
  $x < y \ \Rightarrow\ x + z < y + z$, e $(x < y,\, z > 0) \ \Rightarrow\ xz < yz$.

- Allineamenti (sviluppi) decimali.
Un *allineamento decimale* è una sequenza
$$\pm m, c_1 c_2 c_3 \dots ,$$

dove $m \in \mathbb{N}_0$ e $c_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ per $k \geq 1$. Un *allineamento decimale periodico* è un allineamento che termini con un periodo (di qualche lunghezza finita), ad esempio,

$$223,45612612612\ldots = 223,45\overline{612}\,.$$

Esempio di un allineamento non periodico:

$$0,1010010001000010000010000000\ldots\,.$$

- Ad ogni $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ corrisponde un allineamento che si ottiene effettuando la divisione $p : q$. Tale allineamento è sempre periodico.
  Esempi: $\frac{1}{8} = 0,125\overline{0}\,,\ \frac{321}{7} = 45,\overline{857142}\,.$

- L'allineamento ottenuto nel punto precedente *non termina mai con* $\overline{9}$.
  Esempio: cerchiamo il numero razionale x che corrisponda all'allineamento $0,\overline{9}\,$. Abbiamo:
  $$10x = 9 + x \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$
  Ma, partendo da $x = 1$, l'allineamento ottenuto secondo il punto precedente è $1,\overline{0}\,$.

- Con il procedimento descritto sopra si ottengono *tutti* gli allineamenti periodici che non terminino con $\overline{9}$.
  Esempio: $12,3\overline{45} = 12,3 + 0,0\overline{45}$. Il primo addendo è facile: $12,3 = \frac{123}{10}$, mentre il secondo può essere trattato come nel punto precedente. Alla fine si ottiene:
  $$12,3\overline{45} = \frac{123}{10} + \frac{45}{990} = \cdots = \frac{679}{55}\,.$$

- Conclusione: *vi è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme* $\mathbb{Q}$ *dei razionali e l'insieme di tutti gli allineamenti decimali periodici che non terminino con* $\overline{9}\,$.
  In altre parole, *ogni numero razionale può essere identificato con il suo corrispondente allineamento periodico (non terminante con* $\overline{9}\,$*).*

Numeri reali

- Definizione dei numeri reali come *tutti gli allineamenti decimali* (che non finiscano con $\overline{9}$).

- L'*ordine su* $\mathbb{R}$ viene definito come segue. Siano
  $$x = x_0{,}x_1x_2x_3\ldots \quad \text{e} \quad y = y_0{,}y_1y_2y_3\ldots$$
  due numeri reali distinti (e denotiamo, come al solito, $0 = 0{,}000\ldots$).

- $x > 0$ se $x \neq 0$ e $x_0 \geq 0$.
- $x < 0$ se $x \neq 0$ e $x_0 \leq 0$.
- Per $x, y > 0$: sia $k \in \mathbb{N}_0$ il più piccolo indice tale che $x_k \neq y_k$; allora $x < y$ se $x_k < y_k$ (ordinamento *lessicografico*).
- Per $x, y < 0$: $x < y$ se $-x > -y$.
- Gli altri casi si ottengono dai precedenti imponendo la legge transitiva (se $u < v$ e $v < w$ allora $u < w$).

- Identificando ogni numero razionale con il suo allineamento decimale (periodico), possiamo considerare $\mathbb{Q}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
  Importante: la relazione d'ordine originale di $\mathbb{Q}$ equivale a quella "ereditata" da $\mathbb{R}$ (essendo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$). In altre parole, su $\mathbb{Q}$ i due ordinamenti coincidono.

- *Osservazione.*
  (i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$: $x < n$ (*proprietà archimedea*).
  (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{10^k} < x$.

- *Densità di* $\mathbb{Q}$ *e di* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$: tra ogni due numeri reali distinti vi sono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

- Definizione di *intervallo* $I \subset \mathbb{R}$.
  Tipi di intervalli:
  $\emptyset$;
  (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$,
  $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$,
  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
  Intervalli limitati/illimitati, aperti/chiusi/semiaperti.

03/10/2016 [2 ore: n. 4,5]

- Per un insieme $E \subset \mathbb{R}$, la definizione di: maggiorante, minorante; massimo, minimo; estremo superiore, estremo inferiore.
  E è *limitato superiormente [inferiormente]* se ammette almeno un maggiorante [minorante]; ed è *limitato* se è limitato sia superiormente sia inferiormente.

- *Osservazioni.*
  (a) $x \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di E se e solo se $E \subset (-\infty, x]$.
  (b) Se esiste $\max E$ allora esiste anche $\sup E$ e sono uguali.
  (c) $\max E$ esiste se e solo se esite $\sup E$ e appartiene ad E.
  (d) $x = \sup E$ se e solo se valgono le seguenti due proprietà:

- $\circ$ $\forall y \in E$: $x \geq y$ (cioè, x è un maggiorante);
- $\circ$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists y_\varepsilon \in E$: $x - \varepsilon < y_\varepsilon$ (cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon$ non è maggiorante).

- **Esempi.** Determinare (se esistono) sup, inf, max, min per i seguenti insiemi:
  - $\circ$ $A = [-2, 0)$
  - $\circ$ $B = \{x \in \mathbb{Q} : \; x > 0, \, x^2 \leq 2\}$
  - $\circ$ $C = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

- **Teorema (completezza di $\mathbb{R}$).** *Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente [inferiormente] di $\mathbb{R}$ ammette l'estremo superiore [inferiore] in $\mathbb{R}$.*

- *Significato geometrico della completezza:* "$\mathbb{R}$ riempie tutta la retta". Più precisamente, *esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ ed i punti della retta che preservi la relazione d'ordine.*
  Idea. Abbiamo due insiemi totalmente ordinati: $\mathbb{R}$ e la retta, ciascuno con il suo ordinamento (quello di $\mathbb{R}$ definito usando gli allineamenti, quello della retta definito geometricamente). Conosciamo già la naturale corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{Q}$ e i corrispondenti punti sulla retta, e questa mantiene l'ordinamento. Ora, dato un punto x qualsiasi della retta, consideriamo l'insieme $E_x := \{q \in \mathbb{Q} : q \leq x\}$ della retta; come appena osservato, l'insieme E_x può essere visto come un sottoinsieme (non vuoto e limitato superiormente) di $\mathbb{R}$; per il teorema della completezza, esiste $\sup E_x \in \mathbb{R}$, e questo numero reale sarà quello che rappresenterà il nostro punto x nella corrispondenza biunivoca. E' possibile (e non difficile) dimostrare che la funzione $x \mapsto \sup E_x$ (dalla retta in $\mathbb{R}$) è iniettiva e suriettiva, e che mantiene l'ordinamento.

- Un'idea della dimostrazione del teorema. (Per la dimostrazione formale completa, si veda il libro di Soardi.)

- Definiamo "$\mathbb{R}$ *esteso*" aggiungendo a $\mathbb{R}$ due simboli $-\infty, +\infty$:
  $$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$
  La relazione di ordine su $\overline{\mathbb{R}}$ si definisce aggiungendo all'ordinamento su $\mathbb{R}$ le regole: $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
  Ora, per motivi "formali", possiamo estendere la definizione del sup e dell'inf a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
  - $\circ$ per $E \subset \mathbb{R}$ illimitato superiormente definiamo $\sup E = +\infty$;
  - $\circ$ per $E \subset \mathbb{R}$ illimitato inferiormente definiamo $\inf E = -\infty$;

◦ inoltre poniamo $\sup\emptyset = -\infty$, $\inf\emptyset = +\infty$.
Osserviamo che, per ogni $E \neq \emptyset$, si ha che $\inf E \leq \sup E$.

- Il teorema della completezza di $\mathbb{R}$ ci permette di definire **le operazioni aritmetiche in** $\mathbb{R}$ come segue.

  Dati $k \in \mathbb{N}$ e un numero reale $x = m, c_1c_2\ldots$, $x \geq 0$, definiamo *la* k*-esima troncata di* x il numero (razionale)
  $$x^{(k)} := m, c_1 \ldots c_k\overline{0}\,.$$
  E' facile vedere che
  $$0 \leq x - x^{(k)} < \frac{1}{10^k}\,.$$
  Per $x \geq 0$ e $y \geq 0$ numeri reali definiamo
  $$x + y := \sup\{x + y^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}.$$
  (Gli elementi dell'insieme a destra hanno un significato chiaro; tale insieme è limitato superiormente. Quindi la somma $x + y$ è definita per la completezza di $\mathbb{R}$.)

  Per $0 < y < x$ numeri reali, definiamo
  $$x - y := \inf\{x - y^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}.$$
  Questi due procedimenti ci danno la possibilità di definire in modo naturale la somma di ogni due numeri reali.

  Per il prodotto, basta definire $x \cdot y$ per $x > 0$, $y > 0$ come segue:
  $$x \cdot y := \sup\{x^{(k)} \cdot y^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}.$$
  La definizione dell'inverso x^{-1} si ottiene partendo da $x > 0$. E' facile vedere che esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x^{(k_0)} > 0$ (e quindi $x^{(k)} > 0$ per ogni $k \geq k_0$).
  $$x^{-1} \equiv \frac{1}{x} := \inf\{\tfrac{1}{x^{(k)}} : k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0\}.$$

- **TEOREMA.** $\mathbb{R}$ *è un campo ordinato completo.*
  (Anche $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato, ma non è completo!)

06/10/2016 [2 ore: n. 6,7]

- *Curiosità.* "A meno di isomorfismi", $\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato completo.
(Ogni campo ordinato completo non è nient'altro che $\mathbb{R}$ "con elementi denominati in modo diverso".)

- *Ripasso – la parte intera di un numero reale x:*
$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$
(in altre parole, $[x]$ è il più grande intero che non superi x). Ad esempio,
$$[\sqrt{2}\,] = 1,\ [-\sqrt{2}\,] = -2,\ [4] = 4,\ [-4] = -4.$$

- **Ulteriori proprietà importanti di $\mathbb{R}$.**
  (i) Definizione di x^k ($x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$).
  (ii) Esistenza delle radici k-esime per $x > 0$. Estensione a $x = 0$, e a $x < 0$ per k dispari.
  (iii) Definizione delle potenze razionali: $x^0 = 1$ ($x \neq 0$); per $m, n \in \mathbb{N}$ poniamo
  $$x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}\ , \quad x^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$
  per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui le espressioni a destra sono definite.
  (iv) Potenze reali: definizione x^p ($x > 0$) per $p > 0$ e $p < 0$.
  (v) Per una base $b > 0$ con $b \neq 1$, esistenza (e unicità) dei logaritmi in base b.
  (vi) Razionalità/irrazionalità di somme/prodotti di razionali/irrazionali: cosa possiamo dire?
  (vii) *Esempi.*
  Grafici di: $x^{2/3}$, $x^{7/5}$, $x^{3/8}$, $x^{-3/5}$, $x^{-7/6}$, $x^{-4/3}$, $x^{\sqrt{2}}$.
  Attenzione! Bisogna saper bene disegnare i grafici delle varie potenze (estese al massimo possibile insieme di definizione).

- *Esercizio per voi.* Per ciascuna delle seguenti funzioni stabilire se è iniettiva/suriettiva.
  (i) $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(m,n) = \frac{m}{n}$.
  (ii) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $g(x) = (p,q)$ dove $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q primi tra loro.

Spazi euclidei

- Ripasso: il *prodotto cartesiano* $X \times Y$ di due insiemi X, Y è definito come
$$X \times Y := \big\{(x,y) :\ x \in X,\ y \in Y\big\}\,,$$
cioè, l'insieme di tutte le coppie ordinate aventi al primo posto un elemento di X e al secondo un elemento di Y.
Analogamente, gli elementi del prodotto cartesiano $X \times Y \times Z$ saranno terne ordinate, e quelli di $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ (prodotto cartesiano di n insiemi $X_1, \ldots, X_n$) saranno n-uple ordinate.
Se X è un insieme e $n \in \mathbb{N}$, definiamo
$$X^n := X \times X \times \cdots \times X \qquad (n \text{ volte}).$$

- *Spazio euclideo di dimensione n :*
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}\,.$$
I suoi elementi sono *vettori* $\underline{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$.
Con *scalari* intendiamo elementi di $\mathbb{R}$.

- Operazioni: somma di due vettori, prodotto di uno scalare e un vettore, prodotto interno (scalare) di due vettori.

- *Proprietà del prodotto scalare:* simmetria, omogeneità (in ciascuno dei due fattori), additività (in ciascuno dei due fattori).

- Definizione della norma euclidea.

10/10/2016 [2 ore: n. 8,9]

- *Osservazione.* $\|\underline{x}\|^2 = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle$.

- *Proprietà della norma* (dimostrate):
  (a) $\|\underline{x}\| \geq 0$; [*annullamento*]
  (b) $\|\underline{x}\| = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{0}$;
  (c) $\|t\underline{x}\| = |t|\,\|\underline{x}\|$ $(t \in \mathbb{R})$; [*omogeneità positiva*]
  (d) $\|\underline{x} \pm \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$; [*disuguaglianza triangolare*]
  (d') $\|\underline{x} \pm \underline{y}\| \geq \big|\|\underline{x}\| - \|\underline{y}\|\big|$; [*2ª disug. triangolare*]
  (e) $\big|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle\big| \leq \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|$. [*disug. di Cauchy*]

- Dalla disuguaglianza di Cauchy si vede subito che, per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$:
$$-1 \leq \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|} \leq 1.$$
Dal punto di vista geometrico, si ha che
$$\frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|} = \cos\alpha$$
dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo tra i vettori $\underline{x}, \underline{y}$. In particolare,
$$\underline{x} \perp \underline{y} \text{ se e solo se } \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0.$$

Potenza (cardinalità) di un insieme

"Quanti elementi ha un insieme (non necessariamente finito)?"

- Insiemi equipotenti (notazioni: $X \sim Y$, $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathrm{Y}$).
Diciamo che $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ se X è equipotente ad un sottoinsieme (non necessariamente proprio) di Y.
Diciamo che $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$ se $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ e X, Y non sono equipotenti.
La "$\sim$" è una relazione di equivalenza (rifl., simm., transit.).
Esempio: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

- Insiemi finiti (cioè, l'insieme vuoto e gli insiemi equipotenti a qualche $\{1, 2, \ldots, n\}$), insiemi infiniti.

Insiemi numerabili

Definizione di insieme numerabile. Esempi: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ sono numerabili.

1. Un sottoinsieme infinito di un numerabile è anch'esso numerabile.
(In altre parole, *la potenza del numerabile è la più piccola cardinalità infinita.*)

2. Se X è numerabile e Y è finito o numerabile (cioè, Y è "al più numerabile"), allora anche $X \cup Y$ è numerabile.
L'unione di due (o di un numero finito di) insiemi numerabili è numerabile.

3. Se X, Y sono numerabili, allora anche il prodotto cartesiano $X \times Y$ è numerabile.

4. *L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile.*

5. Dati infiniti insiemi $X_1, X_2, X_3 \dots$ tutti numerabili, allora anche la loro unione $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è numerabile.
(*Idea.* Se gli X_n fossero a due a due disgiunti, potremmo procedere come segue: per ogni n, mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme X_n con la "n-esima riga" del prodotto cartesiano $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, definendo cosí una corrispondenza biunivoca tra U e $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Se invece gli X_n non sono a due a due disgiunti (e quindi c'è il rischio di contare alcuni elementi di U più di una volta), possiamo al posto degli X_n considerare gli insiemi

$$Y_1 := X_1, \quad Y_2 := X_2 \setminus X_1, \quad Y_3 := X_3 \setminus (X_1 \cup X_2), \quad \dots .$$

Questi nuovi insiemi sono al più numerabili e a due a due disgiunti, e la loro unione è U. Ora, mettiamo l'insieme numerabile Y_1 in corrispondenza biunivoca con la prima riga di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, e poi ogni Y_n $(n \geq 2)$ in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme della n-esima riga di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. In definitiva, otteniamo una corrispondenza biunivoca tra U e un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.)

13/10/2016 [2 ore: n. 10,11]

- *Una curiosità.* La cardinalità del numerabile viene spesso denotata con $\aleph_0$ (dove il simbolo $\aleph$, "aleph", è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

- Un insieme è detto *al più numerabile* se è finito o numerabile. Il punto 5. ha il seguente corollario:
Un'unione al più numerabile di insiemi tutti al più numerabili è al più numerabile.

- **Due esempi.**
  (a) L'insieme *Pol* dei polinomi a coefficienti interi è numerabile.
  (b) Un numero reale x è detto *algebrico* se è radice di qualche polinomio non costante $p \in Pol$. È facile vedere che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$, $\mathbb{Q} \neq \mathbb{A}$. L'insieme $\mathbb{A}$ dei numeri algebrici è numerabile.

6. Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.

7. Dal punto precedente seguono:
(a) Se X è infinito e A è al più numerabile, allora $X \cup A \sim X$.

(b) Ogni insieme infinito è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. (E ciò vale *solo* per gli insiemi infiniti.)

La cardinalità del continuo ($= \operatorname{card}\mathbb{R} =: \mathfrak{c}$)

1. $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim (0,+\infty)$.

2. Teorema (Cantor). $\mathbb{R}$ *non è numerabile.*
(E quindi $\operatorname{card}(\mathbb{R}) > \operatorname{card}(\mathbb{N})$, cioè, $\mathfrak{c} > \aleph_0$.)

3. *Corollario.* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$.

- **Esercizio per voi.** Dimostrate che ogni intervallo non degenere $I \subset \mathbb{R}$ è equipotente a $\mathbb{R}$.

L'insieme delle parti

- Dato un insieme X, l'*insieme delle parti di* X è l'insieme $\mathcal{P}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di X (inclusi $\emptyset$ e X stesso).

- *Esempi.* $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$; $\mathcal{P}(\emptyset)$.

- **Teorema.** Per ogni insieme X si ha che $\operatorname{card}\mathcal{P}(X) > \operatorname{card} X$.

  Dimostrazione. La funzione che ad ogni $x \in X$ associa il singoletto $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ è una corrispondenza biunivoca tra X e un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$ (il sottoinsieme di tutti i singoletti). Quindi $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card}\mathcal{P}(X)$.

  Per mostrare che le due cardinalità non sono uguali, procediamo per assurdo, supponendo che $X \sim \mathcal{P}(X)$. Esiste una funzione biunivoca $g\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Definiamo l'insieme

  $$Y := \{x \in X : x \notin g(x)\}.$$

  Essendo $Y \subset X$, abbiamo $Y \in \mathcal{P}(X)$. Quindi esiste (ed è unico) $y \in X$ tale che $g(y) = Y$ ($y = g^{-1}(Y)$). Ora abbiamo:

  $$y \in Y \quad \Leftrightarrow \quad y \notin g(y) = Y$$

  il che è chiaramente una contraddizione. *[q.e.d.]*

- **Tre curiosità.**
  (a) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.
  (b) $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) *Teorema di Cantor–Bernstein.* Se

$$\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y \quad \text{e} \quad \operatorname{card} Y \leq \operatorname{card} X\,,$$

allora $X \sim Y$ (cioè, $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$).
(Questo teorema può sembrare banale, ma non lo è per niente. . .)

17/10/2016 [2 ore: n. 12,13]

Spazi metrici

- Definizione di *spazio metrico* (X, d).

- Definizione di *intorno sferico* $B_r(x)$ centrato in un punto $x \in X$ e di raggio $r > 0$.

- **Esempi di spazi metrici.**
  (a) $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea $d(x, y) := |x - y|$.
  $B_r(x) = (x - r, x + r)$.
  (b) $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea $d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\|$, dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea.
  Tale metrica è *invariante per traslazioni* e *illimitata* (nel senso che esistono distanze arbitrariamente grandi).
  Per $n = 2$, $B_r(\underline{x})$ è il cerchio (bordo escluso) centrato in $\underline{x}$ e di raggio r.
  (c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione iniettiva, allora la formula
  $$d(x, y) := |f(x) - f(y)|$$
  definisce una metrica su $\mathbb{R}$.
  Tale metrica può essere limitata e/o non invariante per traslazioni: ad es., $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.
  (d) *Metrica discreta* su un insieme X:
  $$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
  Per la metrica discreta abbiamo
  $$B_r(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } r \leq 1, \\ X & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

(e) *Una metrica a tre valori.* Sia X l'insieme delle persone presenti nell'aula in un certo istante. Allora la formula

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y \text{ e } x, y \text{ sono dello stesso sesso,} \\ 2 & \text{se } x, y \text{ sono di sesso opposto,} \end{cases}$$

definisce una metrica su X.
(Dimostratelo come **esercizio**!)

(f) *Metrica proveniente da una norma su* $\mathbb{R}^n$.
Sia $\|\cdot\|$ una norma, cioè soddisfa le proprietà (a)–(d) della norma euclidea [v. la lezione del 10/10] (ma non necessariamente soddisfa la disuguaglianza di Cauchy). Allora la formula

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

definisce una metrica invariante per traslazioni e illimitata.
(Dimostratelo come **esercizio**!)
Si noti che non tutte le metriche su $\mathbb{R}^n$ sono generate da una norma (suggerimento: la metrica generata dalla funzione $f(x) = \arctan x$, la metrica discreta).

Ecco alcuni casi particolari:

- la norma $\|\underline{x}\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$ genera una metrica, nella quale (per $n = 2$) gli intorni sferici sono dei quadrati (bordo escluso) con le diagonali parallele agli assi;
- la norma $\|\underline{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ genera una metrica, nella quale (per $n = 2$) gli intorni sferici sono dei quadrati (bordo escluso) con i lati paralleli agli assi;
- in generale, per ogni $p \in [1, +\infty)$, la formula

  $$\|\underline{x}\|_p := \big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{1/p}$$

  definisce una norma su $\mathbb{R}^n$ (la dimostrazione di questo fatto non è semplice); tale norma poi genera una metrica.
  (Si noti che il caso $p = 2$ coincide con la norma e la metrica euclidee.)

Esercizio: verificate che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono davvero norme su $\mathbb{R}^n$.

(g) *"Metrica uniforme" sullo spazio delle funzioni limitate.*
Sia $\mathcal{B}$ l'insieme di tutte le funzioni limitate $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora la formula

$$d(f,g) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)| \qquad (f, g \in \mathcal{B})$$

definisce una metrica sull'insieme $\mathcal{B}$.

- Punti *interni*, *esterni* e *di frontiera* di un insieme $E \subset X$ (dove (X, d) è uno spazio metrico).
  Notazione: E° (l'interno), ∂E (la frontiera).

- *Esempi banali:* $E = X$ e $E = \emptyset$.

- *Esempi in* $\mathbb{R}$ *(euclideo):* $A = (-2, 3]$, $B = \mathbb{Q}$, $C = \mathbb{Z}$.

- *Esempi in* $\mathbb{R}^2$ *(euclideo):*
  $A = \{(x, y) : x < 1\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

- **Esercizio per voi.** Determinare E°, ∂E e l'esterno di E per il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (euclideo):
$$E = (0, 1) \cup \big[(2, 3) \cap \mathbb{Q}\big] .$$

20/10/2016 [2 ore: n. 14,15]

- Definizione di *diametro* di un insieme. Un insieme viene detto *limitato* se il suo diametro è finito.

- *Esempi.*
  (a) In ogni spazio metrico, gli intorni sferici sono limitati; infatti, si ha sempre $\operatorname{diam} B_r(x) \leq r$.
  Si noti che la disuguaglianza può essere stretta: ad esempio, nella metrica discreta!
  (b) Gli spazi $\mathbb{R}^n$ (euclidei) non sono limitati.
  Ma, in generale, tutto lo spazio metrico può essere limitato (ad es., $\mathbb{R}$ con la metrica $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$; oppure qualsiasi spazio nella metrica discreta)!

- **Esercizio per voi.** Dimostrare rigorosamente che, per ogni sottoinsieme non vuoto E di $\mathbb{R}$ (euclideo), si ha l'uguaglianza
$$\operatorname{diam} E = \sup E - \inf E .$$
  (Si noti che la differenza a destra è sempre definita.)

- E' ovvio che: i sottoinsiemi di insiemi limitati sono limitati.

- *Caratterizzazioni di limitatezza.* Sia E un insieme non vuoto in uno spazio metrico (X, d). Allora sono equivalenti:
  (i) E è limitato;
  (ii) E è contenuto in $B_r(x)$ per qualche $x \in X$, $r > 0$;

(iii) per ogni $x_0 \in X$ (fissato), E è contenuto in $B_r(x_0)$ per qualche $r > 0$.

- **Esercizio per voi.** Seguendo il suggerimento dato a lezione, dimostrare rigorosamente le "Caratterizzazioni di limitatezza" qui sopra.

- Unioni finite di insiemi limitati sono insiemi limitati.
  Da ciò segue anche che *ogni insieme finito è limitato.*

- **Teorema (proprietà di Hausdorff).** Dati due punti distinti x_1, x_2 in uno spazio metrico, esiste $r > 0$ tale che
$$B_r(x_1) \cap B_r(x_2) = \emptyset\,.$$
  (E' sufficiente prendere un qualsiasi $r > 0$ tale che $r \leq \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$.)

- Definizioni di: *punto di accumulazione*; *insieme derivato* E' (= l'insieme dei punti di accumulazione di E); *punto isolato.*

- Dati un insieme E e un punto x in uno spazio metrico tali che $x \notin E'$, abbiamo le seguenti due possibilità:
  ◦ se $x \in E$ allora x è un punto isolato di E;
  ◦ se $x \notin E$ allora x è un punto esterno di E.

- **Teorema (caratterizzazioni di chiusi).** Per un insieme E (in uno spazio metrico), le seguenti sono equivalenti:
  (i) E è chiuso;
  (ii) $\partial E \subset E$;
  (iii) $E' \subset E$.

24/10/2016 [2 ore: n. 16,17]

- Ripasso: le leggi di De Morgan, che valgono per famiglie qualsiasi di insiemi e dicono:
  il complementare di un'unione è l'intersezione dei complementari;
  il complementare di un'intersezione è l'unione dei complementari.

- **Teorema.**
  (a) Le unioni (qualsiasi) di aperti sono insiemi aperti.
  (b) Le intersezioni finite di aperti sono insiemi aperti.
  (a') Le intersezioni (qualsiasi) di chiusi sono insiemi chiusi.
  (b') Le unioni finite di chiusi sono insiemi chiusi.

- *Esempi che mostrano che le parole "finite" (nel teorema sopra) non possono essere omesse.*
  $A_n = (-1/n, 1/n)$, $B_n = [1/n, 2]$ $(n \in \mathbb{N})$. Allora:
  (a) gli A_n sono tutti aperti, ma $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ non lo è;
  (b) i B_n sono tutti chiusi, ma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ non lo è.

- *Definizione.* La *chiusura* di un insieme A: $\overline{A} := A \cup A'$.

- *Esercizi.*
  (i) Chiusura degli insiemi: $A = [0, 1)$, $B = \mathbb{N}$, $C = \mathbb{Q}$, $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
  (ii) Sia $E = E_1 \cup E_2$ dove
  $E_1 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \big[(0, 1) \cap \mathbb{Q}\big] \cup (2, 3)\Big\}$,
  $E_2 = \Big\{(4 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\Big\}$. Determinare: E°, ∂E, E', $\overline{E}$.
  (Commento. In esercizi di questo tipo ci sono tre cose da saper fare: 1) capire come è fatto l'insieme dato, 2) capire come sono fatti gli insiemi richiesti, 3) scrivere in modo corretto gli insiemi richiesti.)

- **Teorema (proprietà della chiusura).**
  (i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
  (ii) $\overline{A}$ è un insieme chiuso contenente A.
  (iii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso contenente A, cioè, se C è chiuso e $A \subset C$ allora $\overline{A} \subset C$.
  (iv) A è chiuso se e solo se $\overline{A} = A$.

- **Esercizio per voi*.** Vero o falso? "$\overline{A} = A \cup \partial A$".

- **Proprietà valide definitivamente.** Sia $\mathcal{P}$ una proprietà che un numero naturale può avere o meno. Diciamo che $\mathcal{P}$ *vale definitivamente* se vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ che sia sufficientemente grande, cioè,

  se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}$ valga per ogni $n \geq n_0$.

- *Esempi.*
  (i) La proprietà " essere pari" non vale definitivamente (anche se vale per infiniti $n \in \mathbb{N}$).
  (ii) $n^3 - 1000n^2 - 10n - 2000 > 0$ definitivamente.

- Si noti che

  $$\mathcal{P} \text{ vale definitivamente} \Rightarrow \mathcal{P} \text{ vale per infiniti } n,$$

  ma non vale il vice versa!

27/10/2016 [2 ore: n. 18,19]

- La risposta alla domanda

  l'insieme $A := (\sqrt{2}\,, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ *è aperto, è chiuso?*

  dipende dallo spazio metrico X in cui A viene considerato.
  - In $X = \mathbb{R}$, A non è aperto né chiuso.
  - In $X = \mathbb{Q}$, A è sia aperto sia chiuso.

- *Osservazione utile.* Supponiamo che ciascuna delle proprietà $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ valga definitivamente. Allora anche la proprietà $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ vale definitivamente.

Limiti di successioni in spazi metrici

- **Successioni.** Sia X un insieme non vuoto. Una *successione di elementi di* X (o semplicemente, successione in X) è, in parole povere, una sequenza infinita

  $$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \qquad \text{dove } x_n \in X \text{ per ogni } n$$

  con eventuali ripetizioni. In altre parole, ad ogni $n \in \mathbb{N}$ viene associato un elemento $x_n \in X$. Otteniamo così la definizione formale:
  una successione in X *è una qualsiasi funzione* $f\colon \mathbb{N} \to X$.
  Il suo *termine* n*-esimo* è $x_n := f(n) \in X$.

  Esempio di una successione in $\mathbb{N}$ (o in $\mathbb{R}$):

  $$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots\}.$$

  <u>*Esercizio per voi*.*</u> Qual è il 150^o termine di questa successione?

- *Attenzione*, una successione (ad es., $\{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots\}$) è una cosa diversa dal suo insieme immagine (nel nostro esempio, $\{1, 2, 3\}$).

  Una successione $\{x_n\}$ (in uno spazio metrico) è detta *limitata* se il suo insieme immagine $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato. In altre parole, se esistono $x_0 \in X$ e $r > 0$ con $x_n \in B(x_0, r)$ per ogni n.

- Definizione di "$x_n \to p$". Definizione di *successione convergente*.

- *Osservazione.* Ciascuna delle seguenti affermazioni è equivalente a dire che $x_n \to p$.
  (i) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) \leq \varepsilon$ definitivamente.
  (ii) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) < 10\varepsilon$ definitivamente.

(iii) $\forall \varepsilon > 0$: $d(x_n, p) \leq \sqrt{\varepsilon}$ definitivamente.

- Teorema di *unicità del limite.*

- Esempi (verificati con la definizione di limite).
  (i) In $\mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{n+3}} \to 0$.
  (ii) In $\mathbb{R}$, la successione $\{(-1)^n\}$ non ammette limite.
  (iii) In $\mathbb{R}^2$, la successione $\underline{x}_n = \left(\frac{2n}{n+1}, \frac{n}{1-n}\right)$ tende a $\underline{p} = (2, -1)$.

- *Nella metrica discreta, le successioni convergenti coincidono con quelle definitivamente costanti.* (In generale, ogni successione che sia definitivamente costante è –ovviamente– convergente, ma il vice versa può non valere.)

- *Osservazioni.*
  (i) Se $x_n = y_n$ definitivamente, allora: $x_n \to p \Leftrightarrow y_n \to p$.
  (ii) $x_n \to p$ in (X, d) se e solo se $d(x_n, p) \to 0$ in $\mathbb{R}$ *(un eserciziettto per voi).*

- Una *sottosuccessione* di $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione del tipo $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ dove $n_1 < n_2 < \ldots$ sono numeri naturali.
  Ad esempio, ciascuna delle seguenti successioni è una sottosuccessione di $\{\frac{1}{n}\}$:
  $\{\frac{1}{2k}\}$, $\{\frac{1}{n!}\}$, $\{\frac{1}{m+3}\}$.

- **Teorema.** Una successione converge a p se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono a p.

- **Teorema.** Ogni successione convergente è limitata.
  Ma non vale il vice versa (si veda $\{(-1)^n\}$ in $\mathbb{R}$)!

03/11/2016 [2 ore: n. 20,21]

- **Successioni in spazi euclidei.**
  Per non dover utilizzare due indici, useremo la seguente notazione per le coordinate di un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$:
  $$\underline{x} = \big(x(1), x(2), \ldots, x(d)\big)\,.$$
  Teorema. *Una successione $\{\underline{x}_n\}$ in $\mathbb{R}^d$ converge a $\underline{p}$ in $\mathbb{R}^d$ se e solo se vi "converge per coordinate", cioè,*
  $$\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\} : \quad x_n(i) \to p(i) \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

Per successioni in $\mathbb{R}^2$ quindi il teorema dice che

$$(x_n, y_n) \to (p, q) \qquad (\text{in } \mathbb{R}^2)$$

se e solo se

$$x_n \to p \quad \wedge \quad y_n \to q \qquad (\text{in } \mathbb{R}).$$

- **Convenzione.** *D'ora in poi considereremo successioni anche le "successioni" definite solo definitivamente (non necessariamente su tutto* $\mathbb{N}$*), come ad esempio*

$$\left\{\tfrac{1}{n-3}\right\}, \quad \left\{\log(1 - \tfrac{100}{n})\right\}.$$

Successioni in $\mathbb{R}$

- Intorno destro di raggio $\varepsilon > 0$ di $p \in \mathbb{R}$: $[p, p+\varepsilon)$.
  Intorno sinistro di raggio $\varepsilon > 0$ di $p \in \mathbb{R}$: $(p-\varepsilon, p]$.
  Intorni di $+\infty$: $(M, +\infty)$ dove $M \in \mathbb{R}$.
  Intorni di $-\infty$: $(-\infty, M)$ dove $M \in \mathbb{R}$.
- Definizioni di $x_n \to p^+$ (*per eccesso* o *da destra*) e $x_n \to p^-$ (*per difetto* o *da sinistra*).
- Definizione di $x_n \to +\infty$ e di $x_n \to -\infty$.
- Definizione di *comportamento di una successione* (successioni *regolari*, cioè quelle *convergenti* e quelle *divergenti*; successioni irregolari ovvero *oscillanti*). Esempi.
- Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$.
- Teorema su limiti e le operazioni algebriche.
- *Teorema della permanenza del segno* – con dimostrazione.
- *Teorema di confronto* – con dim.
- *Teorema di confronto asintotico.* Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni in $\mathbb{R}$ tali che
  - $y_n \neq 0$ (almeno) definitivamente, e
  - $\frac{x_n}{y_n} \to \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  Allora:
  (a) $x_n \neq 0$ definitivamente e $\frac{y_n}{x_n} \to \frac{1}{\ell}$ $(\in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(b) le due successioni hanno lo stesso comportamento;
(c) se, inoltre, $\ell = 1$ e almeno una delle due successioni è regolare, allora le due successioni hanno anche lo stesso limite.

(*Idea base della dimostrazione* consiste nell'uso del teorema di permanenza del segno, teorema sulle operazioni, e nell'osservare che se $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $y_n = \frac{y_n}{x_n} \cdot x_n \to \frac{1}{\ell}\, x$.)

- *Un'osservazione* *importante*.
  Se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n y_n \to 0$.

07/11/2016 [2 ore: n. 22,23]

- **Successioni monotòne** – definizione di: successione *non decrescente* (= crescente in senso lato); successione *non crescente* (= decrescente in senso lato); succ. *strettamente crescente*; successione *strettamente decrescente.*

- **Teorema (limiti di successioni monotone).**
  Se $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ *è non decrescente allora* $x_n \to s := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \in (-\infty, +\infty]$.
  Se $\{x_n\}$ *è non crescente allora* $x_n \to i := \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \in [-\infty, +\infty)$.
  In particolare:
  ogni successione monotona e limitata (in $\mathbb{R}$*) è convergente.*

- **Teorema (il numero di Nepero** e**).**
  La successione
  $$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
  è strettamente crescente e limitata. Quindi essa è convergente:

(1) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \in \mathbb{R} \quad \textit{dove } e > 0.$$

Si può dimostrare che il numero e *è irrazionale con*
$$e = 2{,}718281828459\ldots .$$

- *Ripasso:* il comportamento delle *successioni geometriche* $\{q^n\}$.
  (Irregolare per $q \le -1$; convergente a 0 per $|q| < 1$; convergente a 1 per $q = 1$; divergente a $+\infty$ per $q > 1$.)

- **Teorema (criterio del rapporto).** *Sia* $\{x_n\}$ *una successione di numeri reali non nulli. Supponiamo che esista il limite*

(2) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell$$

(che ovviamente appartiene a $[0,+\infty]$*).*
(a) Se $\ell < 1$*, allora esistono* $c > 0$ *e* $q \in (0,1)$ *tali che*

$$|x_n| \le c\,q^n \quad \textit{definitivamente,}$$

e quindi $x_n \to 0$*.*
(b) Se $\ell > 1$*, allora esistono* $c > 0$ *e* $q > 1$ *tali che*

$$|x_n| \ge c\,q^n \quad \textit{definitivamente,}$$

e quindi $|x_n| \to +\infty$*.*
N.B.: Il criterio non dice niente a proposito del caso $\ell = 1$.

- *Esempio.* $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
(Applicando il crit. del rapporto: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \frac{1}{4} < 1$, allora $x_n \to 0$.)

- **Esercizio importante (criterio della radice).** Dimostrate che *lo stesso teorema vale anche se il limite* (2) *viene sostituito con*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \ell\,.$$

(In questo caso non è necessario supporre che $x_n \ne 0$, ed esso vale con $c = 1$.)

Condizione di Cauchy e completezza

- *Definizione.* Sia (X,d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\} \subset X$ *soddisfa la condizione di Cauchy* (oppure *è una successione di Cauchy*) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ per ogni } m, n \ge n_0.$$

Ciò equivale a dire che

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diam} C_k = 0$$

dove $C_k = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$ è la "coda k-esima" di $\{x_n\}$.
[**esercizio per voi!**]

- *Teoremino.* Per una successione $\{x_n\}$ (in uno spazio metrico X) valgono le seguenti implicazioni:

$$\{x_n\} \text{ è convergente in } X \ \Rightarrow \ \{x_n\} \text{ è di Cauchy} \ \Rightarrow \ \{x_n\} \text{ è limitata,}$$

mentre le implicazioni inverse sono false in generale.

- *Definizione.* (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy $\{x_n\} \subset X$ è convergente in X.
(In altre parole, uno spazio metrico è completo se, per le successioni in esso, la prima implicazione nel Teoremino è in realtà un'equivalenza.)

- *Esempio.* Se d è la metrica discreta su un insieme non vuoto X, allora tale spazio metrico (X, d) è completo. (Infatti, una successione di Cauchy è necessariamente definitivamente costante *[perché?].*)

- *Esempi di spazi metrici non completi:*
(i) $X = (0, +\infty)$ (si consideri $x_n = 1/n$);
(ii) $X = \mathbb{Q}$ (si consideri una successione $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ tale che $x_n \to \sqrt{2}$ [in $\mathbb{R}$]);

- **Esercizio per voi.** Su $X = \mathbb{N}$ consideriamo la metrica $d(m, n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Dimostrare che lo spazio metrico $(\mathbb{N}, d)$ non è completo.
(Suggerimento: si consideri $x_n = n$).

Ora sorge naturale la domanda:

lo spazio $\mathbb{R}$ (euclideo) è completo?.

Dimostreremo che la risposta è affermativa.

- **Principio di intervalli compatti inscatolati.** *Consideriamo una successione di intervalli (chiusi e limitati)*

$$I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

tali che $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$. Allora:
(a) l'intersezione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ non è vuota;
(b) se $\operatorname{diam} I_n \to 0$, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{p\}$; inoltre, $a_n \to p$ e $b_n \to p$.

Idea della dimostrazione. Essendo monotone e limitate, le successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ convergono (a α, β, rispettivamente).
(a) Si dimostra che $\alpha \le \beta$ e che $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.
Infatti, $\beta - \alpha = \lim(b_n - a_n) \ge 0$ (permanenza di segno!). L'inclusione

$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_n I_n$ è ovvia (essendo $\alpha = \sup_n a_n$ e $\beta = \inf_n b_n$). Per l'altra inclusione, se x appartiene all'intersezione, allora

$$a_n \leq x \leq b_n \quad \text{per ogni } n.$$

Per il teorema di permanenza del segno, $\alpha \leq x \leq \beta$.
(b) Sia ora $b_n - a_n \to 0$. Essendo $0 \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n$, si ottiene che $\alpha = \beta =: p$. Quindi, $a_n \to \alpha = p$ e $b_n \to \beta = p$.
[q.e.d.]

10/11/2016 [2 ore: n. 24,25]

- **Teorema.** $\mathbb{R}$ *è uno spazio metrico completo.*

  Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione di Cauchy. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la "coda"

  $$C_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

  Denotando $a_n := \inf C_n$ e $b_n := \sup C_n$, abbiamo che

  $$b_n - a_n = \operatorname{diam} C_n \to 0.$$

  Siccome $C_1 \supset C_2 \supset \dots$, abbiamo $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$. Per il Principio di Int. Compatti Inscatolati,

  $$\bigcap_n [a_n, b_n] = \{p\}, \quad a_n \to p, \quad b_n \to p.$$

  Ora, $x_n \in C_n \subset [a_n, b_n]$ per ogni n, e quindi

  $$a_n \leq x_n \leq b_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

  Il teorema di confronto ("teorema dei due carabinieri") ora implica che $x_n \to p$.
  [q.e.d.]

- **Corollario.** *Ogni spazio euclideo* $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio metrico completo.*

  Idea della dimostrazione. Se $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ è di Cauchy, allora è anche "di Cauchy per coordinate". Per il teorema precedente, $\{\underline{x}_n\}$ converge per coordinate, e quindi converge in $\mathbb{R}^d$ (come abbiamo visto qualche lezione fa).
  [q.e.d.]

- Ripasso – sottosuccessioni di una successione.

- **Teorema.** *Ogni successione in* $\mathbb{R}$ *ammette una sottosuccessione monotona (e quindi regolare).*

  Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una qualsiasi successione, e $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ le sue "code" (come nella dimostrazione precedente). Allora possiamo avere i seguenti due casi.

  (a) *Caso 1: per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, la coda* C_n *ammette massimo.*
  In questo caso possiamo procedere induttivamente come segue. Esiste $n_1 \geq 1$ tale che $\max C_1 = x_{n_1}$.
  Esiste $n_2 \geq n_1 + 1$ tale che $\max C_{n_1+1} = x_{n_2}$.
  Esiste $n_3 \geq n_2 + 1$ tale che $\max C_{n_2+1} = x_{n_3}$. E così via.
  Si ottiene così una successione $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ di indici tali che, per l'inscatolamento delle code,

  $$x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \ldots .$$

  (b) *Caso 2: esiste* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $s := \sup C_{\bar{n}} \notin C_{\bar{n}}$ (dove $s \in (-\infty, +\infty]$).
  In questo caso,

  per ogni $n \geq \bar{n}$ *dobbiamo avere* $\sup C_n \notin C_n$ *e* $\sup C_n = s$.

  (Infatti, se C_n avesse massimo, allora anche $C_{\bar{n}}$ lo avrebbe perché ha solo un numero finito di elementi in più; e se fosse $\sup C_n < \sup C_{\bar{n}} = s$, per lo stesso motivo dovrebbe essere $s = \max\{x_i : \bar{n} \leq i < n\}$ e di nuovo $C_{\bar{n}}$ ammetterebbe massimo.)
  Ora, poniamo $n_1 := \bar{n}$. Siccome $x_{n_1} < s = \sup C_{n_1+1}$, per la definizione di estremo superiore deve esistere $n_2 \geq n_1 + 1$ tale che $x_{n_2} > x_{n_1}$.
  Analogamente, essendo $x_{n_2} < s = \sup C_{n_2+1}$, deve esistere $n_3 \geq n_2 + 1$ con $x_{n_3} > x_{n_2}$. E così via.
  Si ottiene così una successione $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ di indici tale che

  $$x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \ldots .$$

  [q.e.d.]

- *Commento.* A lezione, nella parte (b) della dimostrazione del Teorema, abbiamo dimostrato qualcosa in più rispetto all'enunciato del Teorema. Abbiamo fissato anche una successione $\{a_k\} \subset (-\infty, s)$ tendente ad s e, ad ogni passo, abbiamo scelto $n_{k+1} \geq n_k + 1$ in modo che si abbia $x_{n_{k+1}} > \max\{x_{n_k}, a_k\}$ (il che era possibile grazie al fatto che $\max\{x_{n_k}, a_k\} < s$). In questo modo la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$, da noi costruita, soddisfa anche $a_{k-1} < x_{n_k} < s$ e quindi tende ad s ("due carabinieri"!).
  In breve, abbiamo dimostrato la seguente affermazione:

Se qualche "coda" $C_{\bar{n}}$ di $\{x_n\}$ non ammete massimo, allora esiste una sottosuccessione strettamente crescente $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to \sup C_{\bar{n}}$.

- **Corollario importante ("Teorema di Heine–Borel").**
  Per ogni $d \in \mathbb{N}$, ogni successione limitata nello spazio euclideo $\mathbb{R}^d$ ammette una sottosuccessione convergente.

  Dimostrazione.
  Caso $d = 1$. Per il teorema precedente, ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione monotona e (ovviamente) limitata, e quindi convergente.

  Caso $d > 1$. Scrivo solo il caso $d = 2$; il caso generale si dimostra analogamente. Se $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ è una successione limitata, allora le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono limitate in $\mathbb{R}$. Per il caso precedente, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ della $\{x_n\}$, tale che $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. Inoltre, esiste una sottosuccessione $\{y_{n_{k_j}}\}$ della $\{y_{n_k}\}$, tale che $y_{n_{k_j}} \to y \in \mathbb{R}$. Ora, la successione $\{(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})\}$ è una sottosuccessione della $\{(x_n, y_n)\}$ e soddisfa $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$. (Per $d > 2$ serviranno ovviamente d passaggi di estrazione di sottosuccessione.)
  [q.e.d.]

- **Valori limite, classe limite.** Data una successione $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, un elemento $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è detto *valore limite* della successione se quest'ultima ha una sottosuccessione tendente ad ℓ.
  La *classe limite* di $\{x_n\}$ è l'insieme

  $$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\{x_n\}) := \big\{\ell \in \overline{\mathbb{R}} : \ \ell \text{ è un valore limite di } \{x_n\}\big\}.$$

- *Esempi.*
  - $x_n = (-1)^n$
  - $\{x_n\} = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots\}$
  - $x_n = \sin \frac{n\pi}{6}$
  - Una successione con $\mathcal{E} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

    $$\{x_n\} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

  - Una successione con $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}$: ordiniamo tutti i numeri razionali in una successione $\{q_k\}$, e definiamo

    $$\{x_n\} := \{q_1, q_1, q_2, q_1, q_2, q_3, q_1, q_2, q_3, q_4, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \dots\}.$$

- **Teorema (proprietà di classe limite).** Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una qualsiasi successione ed $\mathcal{E} \subset \overline{\mathbb{R}}$ la sua classe limite.
  (a) $\mathcal{E} \neq \emptyset$ (lo sappiamo già!).

(b) l'insieme $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

(c) in $\overline{\mathbb{R}}$, la classe limite $\mathcal{E}$ ammette sia massimo sia minimo, ed essi vengono chiamati, rispettivamente, *massimo limite* (o "limite superiore") e *minimo limite* (o "limite inferiore"). Notazione:

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n := \max \mathcal{E}\,, \quad \liminf_{n\to+\infty} x_n := \min \mathcal{E}\,.$$

(d) *(Esercizio "con asterisco").*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (\sup C_n)\,, \quad \liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (\inf C_n)\,,$$

dove $C_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ è la "coda" n-esima di $\{x_n\}$.

14/11/2016 [2 ore: n. 26,27; **svolte dal dott. C. De Bernardi**]

"Limiti notevoli" – necessari per il calcolo di limiti
(per un elenco si veda il mio sito web)

- **Teorema (limiti e funzioni elementari).** Sia f una delle funzioni elementari (cioè, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche, quelle trigonometriche inverse e le funzioni iperboliche [che vedremo più in avanti]) con l'insieme di definizione D ($\subset \mathbb{R}$). Se $\{x_n\} \subset D$, $x \in D$ e $x_n \to x$, allora anche $f(x_n) \to f(x)$.

- **Notazione.** Se $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}$, $y_n \neq 0$ almeno definitivamente e
$$\frac{x_n}{y_n} \to 0$$
(cioè, "x_n è trascurabile rispetto a y_n"), allora scriveremo
$$x_n \ll y_n \quad \text{oppure} \quad x_n = o(y_n).$$
(La seconda formula, che è quella standard, si legge "x_n è *o piccolo* di y_n".)

- **Teorema (gerarchia di infiniti).** Siano $a > 1$, $b > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Allora
$$\log_b^\beta n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n\,.$$

- **Teorema (gerarchia di infiniti – una generalizzazione).** Siano $a > 1$, $b > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Se $\{z_n\}$ è una successione in $(0, +\infty)$ tale che $z_n \to +\infty$, allora
$$\log_b^\beta z_n \ll (z_n)^\alpha \ll a^{z_n} \ll [z_n]! \ll (z_n)^{z_n}\,.$$
($[t]$ denota la parte intera di t).

- **Limiti notevoli** – quelli derivati dalla definizione del numero e.

- Il limite notevole del logaritmo può essere scritto nella seguente forma, spesso utile:
$$\frac{\log t_n}{t_n - 1} \to 1 \qquad \text{se } 1 \neq t_n \to 1.$$

- Limiti notevoli – completamento.

- Esempio: $\lim n^a \left(\sqrt[5]{n^5 + n^3} - n\right)$

- Esempio: $x_n = (n^2+1)^{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}$

- $\sqrt[n]{n} \to 1$. (Curiosità: $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.)

- Esempio: $x_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^a[2\log(n+1) - \log(n^2+1)]}$

- Attenzione: la relazione $\frac{x_n}{y_n} \to 1$ <u>non</u> implica che $\frac{e^{x_n}}{e^{y_n}} \to 1$.

- Ma per i logaritmi di cui argomenti tendano a $+\infty$ o 0 vale:
se $\{x_n\}, \{y_n\}$ sono due successioni in $(0, +\infty)$ tali che:
(a) $x_n \to +\infty$ *oppure* $x_n \to 0$, *e*
(b) $\frac{x_n}{y_n} \to 1$,
allora anche
$$\frac{\log x_n}{\log y_n} \to 1\,.$$
(Commento: si noti che la proprietà (b) implica che (a) vale anche per $\{y_n\}$ al posto di $\{x_n\}$.)

17/11/2016 [2 ore: n. 28,29]

- **Un'ulteriore proprietà di classe limite.** *Siano* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\{x_n\})$ *e* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Allora:*
(e) $x_n \to \ell \Leftrightarrow \mathcal{E} = \{\ell\}$ *(*$\Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n$*).*

- *Quanto veloce è $n!$?* Applicando il criterio del rapporto alla successione $x_n = \frac{n! a^n}{n^n}$, si scopre che
  - se $a > e$ allora $x_n \to +\infty$ (cioè, $\frac{n^n}{a^n} \ll n!$);
  - se $0 < a < e$ allora $x_n \to 0$ (cioè, $n! \ll \frac{n^n}{a^n}$).

  Per il "caso limite" $a = e$, il criterio del rapporto non dice nulla. Tale caso segue dalla seguente famosa *formula di Stirling.*

- *Teorema (formula di Stirling).* Si ha che $\frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} \to \sqrt{2\pi}$. In altre parole,

$$\frac{n!}{s_n} \to 1$$

  dove

$$s_n := \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} .$$

- *Corollario.*

$$\frac{\log(n!)}{n \log n} \to 1 .$$

  Cioè, anche se $n! \ll n^n$, si ha che $\frac{\log(n!)}{\log(n^n)} \to 1$.
  (N.B. che "log" significa sempre "$\log_e$".)

- *Funzioni iperboliche*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}(x) &\equiv \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} , \\ \mathrm{Ch}(x) &\equiv \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} , \\ \mathrm{Th}(x) &\equiv \tanh x = \frac{\mathrm{Sh}(x)}{\mathrm{Ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} , \end{aligned}$$

  loro grafici, proprietà base, limiti notevoli.

- Qualche esercizio.

24/11/2016 [2 ore: n. 30,31]

Serie di numeri reali (serie numeriche)

- Data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, il simbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \left(\text{più in generale, } \sum_{n=s}^{+\infty} a_n \text{ con } s \in \mathbb{Z} \right),$$

detto *serie numerica di termine generale* a_n, rappresenta un tentativo di calcolare la somma di infiniti numeri:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad \big(\text{nel caso generale, } a_s + a_{s+1} + a_{s+3} + \dots\big).$$

Le *somme parziali* della serie:

$$A_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad (k \in \mathbb{N}).$$

La definizione (un po' troppo) formale definisce la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ come la corrispondente successione $\{A_k\}$ delle somme parziali.
Il *carattere* di una serie è definito come il carattere della successione $\{A_k\}$. Se $\{A_k\}$ è regolare con $A_k \to S \in \overline{R}$, diciamo che S è la somma della serie e scriviamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S\,.$$

- *Esempi.*
  (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ diverge (con somma $+\infty$).
  (ii) Una *serie geometrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge se e solo se $|q| < 1$; e in tal caso, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
  (iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è irregolare.
  (iv) La *serie di Mengoli* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.
  (v) Vedremo più avanti che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{(la } \textit{serie armonica}\text{) diverge, e}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{converge.}$$

- *Osservazioni.*
  (i) Per ogni costante $c \neq 0$, le serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty} (c \cdot a_n)$ hanno lo stesso comportamento e, se regolari, le loro somme soddisfano

$$\sum_1^{+\infty} (c \cdot a_n) = c \left(\sum_1^{+\infty} a_n \right).$$

(ii) Per ogni $s \in \mathbb{Z}$, le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=s}^{+\infty} a_n$ hanno lo stesso comportamento.
Corollario. Se $a_n = b_n$ definitivamente, allora le serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ e $\sum_1^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

- **Teorema (condizione necessaria).** Il termine generale di una serie convergente tende necessariamente a 0.

- *Esempio.* La serie $\sum_1^{+\infty} n^2(3^{1/n} - 1)\log(\frac{n+1}{n})$ non converge.

- *Criterio di Cauchy per le serie.*

- Convergenza assoluta.
Teorema (cond. sufficiente). Se una serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

- *Corollario.* Per una serie $\sum_1^{+\infty} a_n$, valgono le seguenti implicazioni:

$$\sum_1^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_1^{+\infty} a_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0\,,$$

ma le implicazioni inverse sono false (v. la serie $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e quella armonica).

Serie a termini non negativi

- Per una serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente), la succesisone delle sue somme parziali è monotona (o monotona definitivamente) e quindi regolare. In altre parole, tale serie *può solo convergere o divergere.* Inoltre, *essa converge se e solo se la successione delle sue somme parziali è limitata superiormente.*

- **Teorema (criterio di confronto).** *Siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, +\infty)$ *tali che* $a_n \leq b_n$ *per ogni* n *(o almeno definit.). Se* $\sum_1^{+\infty} b_n$ *converge allora converge anche* $\sum_1^{+\infty} a_n$. (E quindi, se $\sum_1^{+\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_1^{+\infty} b_n$ diverge.)

28/11/2016 [2 ore: n. 32,33]

- **Corollario importante (criterio di confronto asintotico).** *Siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset (0, +\infty)$ *tali che* $a_n \sim b_n$ *per* $n \to +\infty$. *Allora le serie* $\sum_1^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_1^{+\infty} b_n$ *hanno lo stesso comportamento.*
(Ovviamente, basta dimostrare che, sotto le nostre ipotesi, se una delle due serie converge allora converge anche l'altra. E ciò si fa riducendosi al criterio di confronto.)

- *Esempio.* La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$:
  ◦ per $\alpha \geq 2$ converge;
  ◦ per $\alpha \leq 0$ diverge.
(Per gli altri valori di α si veda sotto.)
[Per $\alpha = 2$ possiamo applicare il confronto asintotico con la serie di Mengoli. Per $\alpha > 2$ possiamo applicare il confronto con il caso precedente. Per $\alpha \leq 0$, il termine generale non tende a 0.]

- **Teorema (criteri della radice e del rapporto).** Sia $a_n \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Supponiamo che esista

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} =: \ell \quad \text{oppure} \quad \lim \sqrt[n]{a_n} =: \ell \quad (0 \leq \ell \leq +\infty).$$

  (i) Se $\ell < 1$ allora la serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge.
  (ii) Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$ e quindi la serie diverge.
(Sul caso $\ell = 1$ il criterio non dice niente.)

- **Esercizio per voi** (non proposto in aula)**.**
Determinare il comportamento della serie
$\sum_1^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

- *Esempio.* $\sum_4^{+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$.

- **Teorema (criterio di condensazione).** Sia $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Allora le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

hanno lo stesso comportamento.

- **Due serie notevoli:**
  ◦ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge se e solo se $a > 1$;
  ◦ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \log^b n}$ converge se e solo se $a > 1, b \in \mathbb{R}$ oppure $a = 1, b > 1$.

- **Teorema (criterio di Leibniz).** Consideriamo la serie a termini di segno alterno

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$$

  con $b_n \geq 0$ per ogni n (o almeno definitivamente). Se $b_n \searrow 0$ (cioè, $b_n \geq b_{n+1}$ per ogni n, e $b_n \to 0$) allora la serie (3) converge.

- *Commento culturale: una generalizzazione del criterio di Leibniz (non richiesta per l'esame).* Vale il seguente **criterio di Abel**.
  Siano $\{b_n\} \subset (0, +\infty)$ e $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che $b_n \searrow 0$ (come nel criterio di Leibniz) e che la serie $\sum_1^{+\infty} \alpha_n$ abbia le sue somme parziali limitate. Allora la serie
  $$\sum_1^{+\infty} \alpha_n b_n$$
  converge.

- **Esercizio per voi.** Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^2+1}\,(a^2-1)^n\,.$$

01/12/2016 [2 ore: n. 34,35]

Limiti fi funzioni

- *Motivazione* - vedere una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico (X, d) come una funzione $f\colon \mathbb{R} \supset \mathbb{N} \to X$ e esprimere la definizione di "$x_n \to \ell$" in termini di intorni di $+\infty$.

- *Idea base per la definizione di* $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$ *:*
  $\forall V$ intorno di ℓ si ha che "$f(x) \in V$ definitivamente per $x \to p$ ",
  dove l'espressione virgolettata significa:
  $\exists U$ intorno di p tale che per ogni $x \in U \setminus \{p\}$ si abbia $f(x) \in V$.
  (Gli "intorni bucati" del tipo $U \setminus \{p\}$ vengono chiamati *intorni anulari.*)

- **Definizione.** Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $E \subset X_1$, $f \colon E \to X_2$, $p \in E'$, $\ell \in X_2$. Diciamo che
$$\lim_{x \to p} f(x) = \ell$$
se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x \in \big(B(p,\delta) \setminus \{p\}\big) \cap E\ :\quad f(x) \in B(\ell, \varepsilon)\,,$$
ovvero
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x \in E \text{ con } 0 < d_1(x,p) < \delta \colon\ d_2(f(x), \ell) < \varepsilon\,.$$

- **Teorema (caratterizzazione successionale).** Siano, come sopra, $f \colon X_1 \supset E \to X_2$, $p \in E'$, $\ell \in X_2$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) $\lim_{x \to p} f(x) = \ell$;
  (ii) per ogni successione $\{x_n\} \subset E \setminus \{p\}$ tale che $x_n \to p$ si ha che $f(x_n) \to \ell$.

- *Esempi.*
  (i) Vale il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
  (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste: basta considerare le successioni $\{\frac{1}{n}\}$ e $\{-\frac{1}{n}\}$. (Invece i due limiti unilaterali $\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x}$ esistono e valgono $\pm\infty$.)

- *Ulteriori varianti della definizione di limite.*
  - Definizione di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ dove $f \colon \mathbb{R} \supset E \to X_2$, $\inf E = -\infty$, $\ell \in X_2$.
  - Definizione di $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ dove $f \colon X_1 \supset E \to \mathbb{R}$, $p \in E'$.
  - Definizione di $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$ dove $f \colon \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$, $-1 \in (E \cap [-1, +\infty))'$.
  - Definizione di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ dove $f \colon \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$, $\sup E = +\infty$.
  - Per altri casi si veda il libro di Soardi.

- **Teorema (proprietà di limiti di funzioni).** *Supponiamo, come sopra, che $f \colon X_1 \supset E \to X_2$, $p \in E'$.*
  (a) *Unicità di limite* $\lim_{x \to p} f(x)$. (Segue dalla caratterizzazione successionale [C.S.].)
  (b) *Locale limitatezza:* se $\lim_{x \to p} f(x) = \ell$ allora f è limitata in qualche
  $$B^{\bullet}_{\delta,E}(p) := \big(B_\delta(p) \setminus \{p\}\big) \cap E.$$
  (c) *Permanenza di segno per $X_2 = \mathbb{R}$.* Sia $\lim_{x \to p} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b1) Se $\ell > \alpha$ allora $f(x) > \alpha$ in qualche $B^\bullet_E(p,r)$.
(b2) Se $f(x) \geq \alpha$ in qualche $B^\bullet_E(p,r)$ allora $\ell \geq \alpha$.
[*Dimostrazione – ESERCIZIO PER VOI!*]

(d) (Per $X_2 = \mathbb{R}$) *teorema di confronto ("dei 3 carabinieri"); operazioni algebriche e limiti; limiti e funzioni elementari; limiti notevoli:* tutto ciò segue facilmente utilizzando la C.S.

Due commenti sulle serie numeriche

- *Serie somma.* Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)\,.$$

Se le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

sono regolari e la somma delle loro somme esiste (in $\overline{\mathbb{R}}$), allora anche la serie iniziale è regolare con

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

- *Sui riordinamenti.* Data una serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\,,$$

un suo *riordinamento* è una serie che si ottiene "cambiando l'ordine dei termini della serie iniziale", cioè, riordinandoli (utillizzandoli tutti e senza ripetizioni); ad esempio:

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + a_9 + a_{11} + a_6 + \dots\,.$$

Valgono i seguenti risultati:

1. *Se la serie converge assolutamente, allora ogni suo riordinamento converge assolutamente e ha la stessa somma.*

2. Teorema di Riemann. *Se la serie converge, ma non assolutamente, allora con un opportuno riordinamento è possibile ottenere un qualsiasi comportamento e una qualsiasi somma (finita o infinita).*

Per la definizione e formulazioni precise si veda il file "Riordinamenti di serie numeriche".

05/12/2016 [2 ore: n. 36,37]

Insiemi compatti in spazi metrici
(Argomento presentato in modo diverso, ma equivalente,
rispetto al libro di Soardi
– si veda il *file* sulla mia pagina web.)

- *Definizione di insieme compatto (tramite successioni).* Un insieme C (in uno spazio metrico) è *compatto* se ogni successione in C ammette una sottosuccessione convergente a qualche punto di C.

- *Osservazione.* C è compatto (in (X, d)) se e solo se lo spazio metrico (C, d) è compatto (in se stesso).

- Esempi di insiemi compatti; esempi di insiemi non compatti.

- Condizione necessaria per la compattezza (ma in generale non sufficiente): essere chiuso e limitato.

- Condizione necessaria e sufficiente per la compattezza in $\mathbb{R}^d$ (*teorema di Heine–Borel*).

- *Teorema di Bolzano–Weierstrass:* ogni insieme infinito e limitato in $\mathbb{R}^d$ ha almeno un punto di accumulazione.

- **Esercizio per voi** (non fatto a lezione). Siano $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ infiniti insiemi tutti compatti e non vuoti in uno spazio metrico (X, d). Dimostrare che
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \neq \emptyset \,.$$
(Suggerimento: per ogni n fissare $x_n \in E_n$, ottenendo così una successione in E_1.)

- *Definizione.* Sia E un insieme in uno spazio metrico.
Una *copertura* [*aperta*] di E è una qualsiasi famiglia $\mathcal{A} := \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ di insiemi [aperti] tale che $E \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.
Una sottofamiglia $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ è una *sottocopertura* di $\mathcal{A}$ se anch'essa è una copertura di E.

- **Teorema (caratterizzazioni di compattezza).** *Sia E un insieme non vuoto in uno spazio metrico. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *E è compatto* [secondo la nostra definizione]*;*
(ii) *ogni copertura aperta di E ammette una sottocopertura finita* [questa è la definizione di compattezza utilizzata nel libro di Soardi]*;*
(iii) *ogni sottoinsieme infinito di E ha almeno un punto di accumulazione in E.*

Continuità

- In quanto segue, (X_i, d_i) sono spazi metrici, $E \subset X_1$ è un insieme, $f \colon E \to X_2$, $p \in E$.
- Definizione di *continuità* di f nel punto p.
- *Osservazioni.*
  (i) Se p è un punto isolato di E allora f è automaticamente continua in p.
  (ii) Supponiamo invece che $p \in E'$. Allora le seguenti sono equivalenti:
    (a) f è continua in p;
    (b) $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$;
    (c) se $E \ni x_n \to p$ allora $f(x_n) \to f(p)$.
  (iii) Siccome la (c) vale sempre se $p \notin E'$ *[perché?]*, l'equivalenza $(a) \Leftrightarrow (c)$ è vera per ogni $p \in E$ (che sia isolato o meno).
  (iv) Osserviamo che il teorema su "limiti e funzioni elementari" in realtà dice che *ogni funzione elementare è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.*
- *Esercizio importante.* Supponiamo che $f \colon X_1 \supset E \to X_2$, $g \colon X_2 \supset D \to X_3$, $f(E) \subset D$. Se f è continua in un punto $p \in E$ e g è continua nel punto $f(p)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in p.
- *Definizione (continuità globale).* $f \colon E \subset X_1 \to X_2$ è continua (in E, oppure su E) se f è continua in ogni punto di E.
- **Teorema (Weierstrass).** Se $f \colon X_1 \supset C \to X_2$ è continua e C è compatto, allora l'insieme immagine $f(C)$ è compatto.
  Idea della dimostrazione. Sia $\{y_n\} \subset f(C)$. Esiste $\{x_n\} \subset C$ tale che $f(x_n) = y_n$ per ogni n. Esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a qualche $p \in C$. Allora $y_{n_k} \to f(p) \in f(C)$. *[q.e.d.]*

12/12/2016 [2 ore: n. 38,39]

- *Ripasso:* definizione di continuità, compattezza, teorema di Weierstrass.

- *Esempio.* Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Allora f è continua su $(0,1]$ e anche su $(0,1] \cup \{2\}$, ma non è continua su $[0,1]$ né su $[1,2]$.

- *Lemma.* Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente [inferiormente]. Allora esiste $\max E$ [$\min E$].

  Dimostrazione. Se $s := \sup E$ non appartenesse ad E, allora anche tutto un intorno di s sarebbe disgiunto da E; e ciò facilmente contraddice la definizione di s come il minimo dei maggioranti di E. *[q.e.d.]*

- **Corollario (teorema di Weierstrass, esistenza di estremanti).** *Siano (X,d) spazio metrico, $C \subset X$ insieme compatto non vuoto, $f\colon C \to \mathbb{R}$ funzione continua. Allora f assume in C massimo e minimo, cioè, esistono* $\max f(C)$ *e* $\min f(C)$.

- *Esempio di applicazione.* Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che entrambi i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ esistano e valgano $+\infty$. Allora f assume il suo minimo; in particolare, f è limitata inferiormente.

  (*Idea della dim.*. Denotiamo $i := \inf f(\mathbb{R})$ $(< +\infty)$ e fissiamo un $m \in \mathbb{R}$ tale che $m > i$. Esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $f(x) > m$ in $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Ne segue facilmente che $i = \inf f([a,b]) = \max f([a,b])$ [l'ultima uguaglianza viene dal teorema di Weierstrass], e quindi $i = f(x)$ per qualche $x \in [a,b]$.)

- **Teorema (caratterizzazioni di continuità).** Per una funzione $f\colon X_1 \to X_2$ (cioè, $E = X_1$), le seguenti sono equivalenti:
  (i) f è continua;
  (ii) la controimmagine $f^{-1}(A)$ di ogni aperto $A \subset X_2$ è un insieme aperto;
  (iii) la controimmagine $f^{-1}(C)$ di ogni chiuso $C \subset X_2$ è un insieme chiuso.

- **Teorema (degli zeri).** Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $p \in (a,b)$ tale che $f(p) = 0$.

  Dimostrazione del teorema degli zeri.
  Supponiamo, ad es., che $f(a) < 0 < f(b)$. Applicheremo il metodo di bisezione. Consideriamo il punto medio di $[a,b]$. Se f vi si annulla,

abbiamo finito. Se no, denotiamo con $[a_1, b_1]$ quella delle due metà di $[a, b]$ per cui $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Ripetiamo lo stesso con l'intervallo $[a_1, b_1]$, ottenendo $[a_2, b_2]$ come quella delle due metà di $[a_1, b_1]$ con valori di f agli estremi di segno discorde. E così via. Se a nessun passo il punto medio è uno zero per f, otteniamo così una successione di intervalli inscatolati

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

le cui lunghezze tendono a 0. Per il *Principio di intervalli chiusi inscatolati*,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] = \{p\}\,, \quad a_k \to p\,, \quad b_k \to p\,.$$

Allora $0 > f(a_k) \to f(p)$, $0 < f(a_k) \to f(p)$ (continuità!). Siccome $f(p) \leq 0$, $f(p) \geq 0$ (permanenza di segno!), si ha $f(p) = 0$. *[q.e.d.]*

- **Corollario 1 (Teorema dei valori intermedi, di Darboux).** Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \neq f(b)$. Allora f assume in (a, b) tutti i valori strettamente compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

  Idea della dimostrazione. Se v è un numero reale strettamente compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, applicare il teorema precedente alla funzione $g(x) = f(x) - v$. *[q.e.d.]*

- **Corollario 2 (riformulazione del Teorema di Darboux).**
  "L'immagine continua di un intervallo è sempre un intervallo."
  Più precisamente, se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f(I)$ è un intervallo.

  Commento. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f ha la *proprietà di Darboux* se per ogni intervallo $J \subset I$ l'immagine $f(J)$ è un intervallo. Dal Corollario 2 segue che ogni funzione continua (su un intervallo) ha la proprietà di Darboux. E' noto (e lo vedremo più avanti) che anche alcune funzioni non continue possono avere la proprietà di Darboux.

- *Corollario.* Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f([a, b]) = [m, M]$ con opportuni $-\infty < m \leq M < +\infty$.

- *Esempio.* Se f è continua su un intervallo aperto I, l'insieme immagine $f(I)$ può non essere un intervallo aperto: si consideri $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

- **Esercizi (facili!) per voi.** Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$.

(a) Se f è continua con $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, allora f è suriettiva.
(b) Se f è continua e strettamente monotona, allora $f((a,b))$ è un intervallo aperto.

15/12/2016 [2 ore: n. 40,41]

- *Classificazione delle discontinuità.* Supponiamo che f sia una funzione (a valori reali) definita almeno in un "intorno bucato" di un punto x_0 : $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Per semplicità denotiamo

$$L_\pm(x_0) := \lim_{x\to(x_0)\pm} f(x)\,.$$

Possono verificarsi i seguenti 4 casi:
(a) $L_\pm(x_0)$ esistono ed entrambi sono uguali a $f(x_0)$; in questo caso x_0 è un punto di continuità.
(b) $L_\pm(x_0)$ esistono finiti, sono uguali tra loro ma diversi da $f(x_0)$ (che include anche il caso in cui f non è definita in x_0); in questo caso x_0 è un punto di *discontinuità eliminabile.*
(c) $L_\pm(x_0)$ esistono finiti ma sono diversi tra loro; in questo caso x_0 è un punto di *discontinuità di I specie* ("salto finito").
(d) In tutti gli altri casi (cioè quando almeno uno dei due limiti è infinito o non esiste), x_0 è un punto di *discontinuità di II specie.*

- Esempi di vari tipi di discontinuità: $|\mathrm{sgn}(x)|$, $\frac{\sin x}{x}$, $\mathrm{sgn}(x)$, $\arctan \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$, $e^{1/x}$, $\sin \frac{1}{x}$.

- La *funzione di Dirichlet*,

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

presenta in tutti i punti una discontinuità di II specie.

- *Definizione di vari tipi di monotonia di f su un intervallo*: non decrescente (o crescente in senso lato), strettamente crescente, non crescente (o decrescente in senso lato), strettamente decrescente.

- **Teorema.** Siano (a,b) un qualsiasi intervallo aperto non vuoto e $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente. Allora
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)\,.$$
(La semplice dimostrazione è stata proposta come esercizio. Si veda anche il libro di Soardi, Teorema 7.9.3.)

- **Teorema.** Siano (a,b) un qualsiasi intervallo aperto non vuoto e $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Denotiamo
$$D_f = \{x \in (a,b) : f \text{ non è continua in } x\}.$$
(i) Ogni $x \in D_f$ è un punto di discontinuità di I specie.
(ii) L'insieme D_f è al più numerabile. (In particolare, tra ogni due punti distinti di (a,b) vi è almeno un pnto di continiutà di f.)

- **Teorema (continuità dell'inversa).** Sia f una funzione continua in un intervallo I, e denotiamo $J = f(I)$.
(i) f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona.
(ii) Se f è strettamente monotona allora $f^{-1}\colon J \to I$ è continua.
[Non dimostrato.]

Calcolo differenziale

- Definizione di:
    - rapporto incrementale,
    - funzione derivabile in un punto x_0,
    - derivata in x_0,
    - retta tangente,
    - derivabilità da destra [sinistra], derivata destra [sinistra].

- *Significato di* $f'(x_0)$: dal punto di vista geometrico, è il coeff. angolare della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0; da punto di vista fisico, è la velocità istantanea di cambiamento della quantità f.

- **Esercizio per voi.** Per $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e $m \in \mathbb{R}$, le seguenti sono equivalenti:
(a) f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = m$;
(b) $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$;
(b') $f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h)$ per $h \to 0$.

- Continuità in x_0 come *condizione necessaria* per la derivabilità in x_0.

- *Continuità non implica la derivabilità*; alcuni tipi di non derivabilità:
  (a) $f(x) = |x|$ ha in 0 un *punto angoloso* ($f'_+(0) \neq f'_-(0)$ e almeno una delle due è finita);
  (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha in 0 un *punto a tangente verticale* ($f'(0) = +\infty$);
  (c) $f(x) = \sqrt{|x|}$ ha in 0 una *cuspide* ($f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$);
  (d) $f(x) = x \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$; anche questa funzione è continua in 0, ma non ammette nessuna delle due derivate $f'_\pm(0)$.

- *Le regole di derivazione (di somme, prodotti, rapporti) e le derivate delle funzioni elementari* **vanno imparate bene dal punto di vista della manualità!** Potete trovarle sul libro di Soardi: Teorema 8.4.1 e § 8.5. Qui è molto importante allenarsi!

- **Teorema (derivata di funzioni composte).** Siano I, J due intervalli, $f\colon I \to J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in I$ e se g è derivabile nel punto corrispondente $y_0 := f(x_0)$ ($\in J$), allora anche la funzione composta $h := g \circ f$ è derivabile in x_0 con
  $$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)\,.$$
  In altre parole, nel punto x_0 vale la formula
  $$\big[g(f(x))\big]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$
  [Non dimostrato.]

- *Esempi:* derivare le funzioni $f(x) = \log^3 x$ e $g(x) = \log(x^3)$.

19/12/2016 [2 ore: n. 42,43; **svolte dal dott. C. De Bernardi**]

- **Teorema (derivata dell'inversa).** Dati $f\colon I \to \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo) e un punto $x_0 \in I$, supponiamo che
  (a) f sia continua e strettamente monotona in I, e
  (b) f sia derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$.
  Denotiamo $J = f(I)$ (è un intervallo!). Allora f è derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0) \in J$ con
  $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

- *Esempi.*
  (a) Sapendo che $(e^x)' = e^x$ in ogni punto di $\mathbb{R}$, calcolare la derivata della funzione $\log x$ in ogni punto.

(b) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$. Siccome f è continua con $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f(\mathbb{R})$ è un intervallo illimitato sia superiormente sia inferiormente, cioè f è suriettiva. Essendo strettamente monotona, f è anche iniettiva. Calcolare $(f^{-1})(1)$.

- **Esercizio per voi.** Sapendo che $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ in ogni punto in cui $\cos x \neq 0$, calcolare (dove esiste) la derivata della funzione $\arctan x$.

- Per le definizioni rigorose di *punto angoloso*, *punto a tangente verticale* e *cuspide*, si veda il libro di Soardi, § 8.3.

- **Estremanti:** estremanti assoluti (globali), estremanti relativi (locali); estremanti stretti.

  Esempi.

- *Teorema di Fermat* – condizione necessaria per estremanti.

- *Punti sospetti di essere estremanti di* $f\colon I \to \mathbb{R}$:
  - punti di derivabilità in I° con derivata nulla;
  - punti di non derivabilità in I°;
  - gli eventuali estremi di I (appartenenti ad I).

- **Convenzione.** Diciamo che *f soddisfa l'ipotesi (H) in I* se: f è continua in I e derivabile in I°.

- Teoremi di **Rolle** e di **Lagrange** *(="teorema dell'incremento finito")*. (In entrambi, l'ipotesi base è (H).)

- *Commento.* Esiste una generalizzazione del teorema di Lagrange, *teorema di Cauchy*, di cui non avremo bisogno. Gli studenti interessati lo troveranno sul libro di Soardi (Teorema 7.8.2).

- **Teorema (derivata e monotonia).** Siano I un intervallo non degenere e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfi (H).

  (i) $f' \geq 0$ in I° $\Leftrightarrow$ f è non decrescente in I.

  (ii) $f' > 0$ in I° $\Rightarrow$ $(\not\Leftarrow)$ f è strettamente crescente in I.

  (iii) $f' = 0$ in I° $\Leftrightarrow$ f è costante in I.

- *Teorema (derivata come limite di derivate).* Supponiamo che f soddisfi la condizione (H) in $[a, b)$ e che esista (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell\,.$$

  Allora $f'_+(a) = \ell$.

- *Commento.* Il seguente esempio mostra che se il limite delle derivate non esiste non possiamo concludere che non esista $f'_+(a)$!

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Anche se nessuno dei due limiti $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x)$ esiste, la funzione f è derivabile in 0 con $f'(0) = 0$. Si noti che la funzione derivata f' è definita in tutto $\mathbb{R}$, ma non è continua in 0.

09/01/2017 [2 ore: n. 44,45]

- *Ripasso* – teorema sulla "derivata come limite di derivate" (TDLD).

- Il TDLD può essere visto come un caso particolare della seguente **Regola di de l'Hopital**.

Siano $(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, e $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Passo 1. Il limite è del tipo "$\frac{0}{0}$" oppure "$\frac{\infty}{\infty}$"?
Se no, STOP.
Se sí, si passi al Passo 2.
Passo 2. Esiste (finito o infinito) il limite $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *?*
Se no, STOP.
Se sí, possiamo concludere che

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- *Corollario del TDLD.* Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora ogni punto di discontinuità di f' è di II specie.
(Più precisamente, in ogni tale punto la derivata non ammette né il limite destro né quello sinistro.)

- *Esempio.* Dal Corollario segue immediatamente che la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ non è derivata di alcuna funzione derivabile in un intorno di 0.

- *Curiosità (approfondimento).* Se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, allora f' ha la *proprietà di Darboux*, cioè, per ogni intervallo $J \subset (a,b)$ l'insieme immagine $f'(J)$ è un intervallo.

Derivate successive, sviluppi di Taylor

- Definizione di:
  (a) f è n volte derivabile in I;
  (b) f è n volte derivabile in x_0.

- *Definizione.* Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0, consideriamo il polinomio

$$P_{n,f}(x) = P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,,$$

  con la convenzione che $f^{(0)} = f$ e $(x - x_0)^0 \equiv 1$ (anche per $x = x_0$). Esso viene detto *polinomio di Taylor di "grado n"* (in realtà, $\leq n$) *di f, centrato in x_0.*

- *Proprietà di P_n.*
  (a) $(P_{n,f})' = P_{n-1,f'}$.
  (b) $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$.
  (c) P_n è <u>l'unico</u> polinomio di grado $\leq n$ che soddisfi (b).

- *Terminologia.* Bisogna distinguere tra *polinomio* di Taylor (definito sopra) e *sviluppo* di Taylor. Quest'ultimo è un'uguaglianza tipo

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

  dove $r_n(x)$ è il "resto", cioè l'errore che si commette sostituendo f con P_n.
  Gli sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ vengono chiamati *sviluppi di McLaurin.*

- **Teorema (sviluppo di Taylor, resto di Peano).** Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in x_0. Allora

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0.$$

  Inoltre, P_n è <u>l'unico</u> polinomio di grado $\leq n$ che soddisfi tale formula.

- **Applicazione 1 (condizione sufficiente per estremante).** *Siano $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che f sia n volte derivabile in x_0 e che*
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
Allora lo sviluppo di grado n di f può essere così riscritto:
$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)\,, \quad x \to x_0,$$
e quindi
$$f(x) - f(x_0) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,, \quad x \to x_0.$$
Ne segue che l'incremento $f(x) - f(x_0)$ e la funzione $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ hanno lo stesso segno in un opportuno intorno di x_0.
Ora:
    - *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;*
    - *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo;*
    - *se n è dispari, alora x_0 non è estremante (inoltre, se n è dispari e $n > 1$, allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale).*

- **Applicazione 2.** Supponiamo che $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sia n volte derivabile in 0 e che
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\,, \quad x \to 0$$
(con i coefficienti a_k noti). Per l'unicità dello sviluppo, la formula concide con lo sviluppo di McLaurin di grado n di f. Di conseguenza,
$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{per} \quad k = 0,1,2,\dots,n,$$
e quindi
$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!\,, \quad k = 0,1,2,\dots,n.$$
Conosciamo così tutte le derivate di f in 0 fino all'ordine n, senza dover derivare la funzione!

12/01/2017 [2 ore: n. 46,47]

- *Esempi* su "come leggere uno sviluppo di Taylor" (si veda il relativo file sul mio sito web).

- *Esempio.* Scrivendo lo sviluppo di $f(x) = e^x$ nel punto $x_0 = 0$, otteniamo che, per $x \to 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Analogamente si ottengono gli sviluppi di altre funzioni elementari (v. gli sviluppi notevoli), che abbiamo utilizzato per il calcolo di limiti.

- *Convenzioni per il prossimo teorema.*
  (a) Con $[x_0, x]$ e (x_0, x) denotiamo l'intervallo rispettivamente chiuso e aperto di estremi x_0, x, anche nel caso in cui $x_0 > x$.
  (b) "0 volte derivabile" significa "continua".
  (c) $P_0(x) := f(x_0)$ (polinomio di T. di grado 0, centrato in x_0).

- **Teorema (sviluppo di Taylor, resto secondo Lagrange).** Siano I un intervallo non degenere, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}_0$. Sia $x \in I \setminus \{x_0\}$ un punto fissato. Supponiamo che f sia:
  (a) n volte derivabile in $[x_0, x]$,
  (b) $n + 1$ volte derivabile in (x_0, x).
  Allora esiste un punto $c \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

- *Commento.* Si noti che il caso $n = 0$ è estattamente il Teorema di Lagrange ("teorema dell'incremento finito").

- *Applicazione 1.* Per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \,.$$

  In particolare,

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \,.$$

Allo stesso modo si verificano le seguenti formule validi per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x\,,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x\,,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{Sh}(x)\,,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{Ch}(x)\,.$$

- *Applicazione 2.* Il numero e è irrazionale.
  (*Curiosità.* E' noto che il numero e è un numero trascendente, cioè che non è radice di alcun polinomio a coefficienti interi.)

- Sfruttando il fatto che:
  (a) se f è pari [dispari] allora f' è dispari [pari];
  (b) se f è dispari allora $f(0) = 0$,
  si deduce facilmente che:
  se f è dispari [pari] allora il suo polinomio di McLaurin (cioè, Taylor centrato in $x_0 = 0$) contiene solo potenze dispari [pari] (nel senso che i coefficienti delle altre potenze sono sempre nulli).

- Definizione di punto di flesso (a tangente obliqua, orizzontale, verticale).

- Le funzioni "concave verso l'alto" vengono chiamate *funzioni convesse*; le funzioni "concave verso il basso" vengono chiamate *funzioni concave.*

- *Teorema.* Se f è una funzione convessa in un intervallo I, allora in ogni punto $x \in I^\circ$ esistono finite entrambe le derivate unilaterali $f'_\pm(x)$. In particolare, f è continua in I° (ma non necessariamente nei punti estremi di I).

- *Teorema (criteri di convessità).*
  Sia f una funzione continua in un intervallo I.
  A. Sia f derivabile in I°.
  (A1) Se f' è non decrescente in I°, allora f è convessa in I.

(A2) Se f' è strettamente crescente in I° allora f è strettamente convessa.

B. Sia f due volte derivabile in I°.

(B1) Se $f'' \geq 0$ in I°, allora f è convessa in I.

(B2) Se $f'' > 0$ in I° allora f è strettamente convessa.

- *Due chiacchiere sui numeri complessi* (argomento che non fà parte del corso quest'anno).

FINE DEL CORSO