DIFFERENZIABILITÀ DELLA NORMA DI ℓ_∞

L.V., 2013

In quanto segue, $\|\cdot\|$ denota la norma standard di ℓ_∞, cioè,

$$\|x\| = \sup_n |x(n)| \,.$$

Theorem 1. *Per* $x \in \ell_\infty$, *poniamo* $M_x = \{n \in \mathbb{N} : |x(n)| = \|x\|\}$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\|\cdot\|$ *è Fréchet differenziabile in* x*;*
(ii) $\|\cdot\|$ *è Gâteaux differenziabile in* x*;*
(iii) $M_x = \{k\}$ *(per un opportuno* $k \in \mathbb{N}$*) e* $\sup_{n \neq k} |x(n)| < 1$*;*
(iv) $M_x = \{k\}$ *(per un opportuno* $k \in \mathbb{N}$*) e* $\limsup_{n \to +\infty} |x(n)| < 1$.

Proof.
a) L'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ e l'equivalenza $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ sono ovvie. Per dimostrare il resto, possiamo supporre *(perché?)* che

$$x(n) \geq 0 \text{ per ogni } n, \ e \ \ \|x\| = 1. \tag{1}$$

b) Per dimostrare che $(ii) \Rightarrow (iv)$, dimostreremo che $\neg(iv) \Rightarrow \neg(ii)$. Prima di iniziare, osserviamo che (sotto l'ipotesi (1)), per $t > 0$,

$$\frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t} = \frac{1}{t}\left(\sup_n |x(n) + tv(n)| - 1\right) = \sup_n \frac{|x(n) + tv(n)| - 1}{t}\,, \tag{2}$$

mentre per $t < 0$,
(3)

$$\frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t} = -\frac{1}{|t|}\left(\sup_n \big|x(n) - |t|v(n)\big| - 1\right) = -\sup_n \frac{\big|x(n) - |t|v(n)\big| - 1}{|t|}\,.$$

b1) Supponiamo che $\limsup_n x(n) = 1 \, (= \|x\|)$. Sia $\{x(n_j)\}$ una sottosuccessione di $\{x(n)\}$ tale che

$$x(n_j) \to 1 \ \text{ e } \ x(n_j) > \tfrac{1}{2} \text{ per ogni } j.$$

Consideriamo $v \in \ell_\infty$, dato da

$$v(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = n_j \text{ per qualche } j \text{ dispari,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per semplicità, denotiamo $J = \{n_j : \ j \text{ dispari}\}$. Per $t > 0$, la (2) implica che

$$\frac{\|x+tv\| - \|x\|}{t} = \max\left\{\sup_{n\in J} \frac{x(n)+t-1}{t}\,,\ \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus J} \frac{x(n)-1}{t}\right\} = 1$$

da cui $\|\cdot\|'_+(x,v) = 1$. Dall'altra parte, per $t \in (-\frac{1}{2}, 0)$, la (3) ci dà

$$\begin{aligned}\frac{\|x+tv\| - \|x\|}{t} &= -\max\left\{\sup_{n\in J} \frac{x(n)-|t|-1}{|t|}\,,\ \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus J} \frac{x(n)-1}{|t|}\right\}\\ &\le -\sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{x(n_{2i})-1}{|t|} = 0\end{aligned}$$

da cui $\|\cdot\|'_-(x,v) \le 0$, e quindi la (ii) è falsa.

b2) Supponiamo ora che $\limsup_n x(n) < 1$ e M_x contenga due distinti indici k, m. Analogamente a quanto fatto sopra, per $t > 0$,

$$\frac{\|x+te_k\| - \|x\|}{t} = \max\left\{\frac{x(k)+t-1}{t}\,,\ \sup_{n\ne k} \frac{x(n)-1}{t}\right\} = \frac{x(k)+t-1}{t} = 1$$

da cui $\|\cdot\|'_+(x,e_k) = 1$. Per $t \in (-1, 0)$,

$$\frac{\|x+te_k\| - \|x\|}{t} \le -\frac{x(m)-1}{|t|} = 0$$

da cui $\|\cdot\|'_-(x,e_k) \le 0$, e quindi la (ii) è falsa.

c) Rimane da dimostrare che *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Se vale (iii), esiste $\varepsilon > 0$ tale che $x(n) \le 1 - 2\varepsilon$ per ogni $n \ne k$. Dimostriamo che vale la (i) con la derivata di Fréchet $\|\cdot\|'(x)(v) = v(k)$ $(v \in \ell_\infty)$.

Sia $v \in \ell_\infty$ tale che $0 < \|v\| < \varepsilon$. Allora $x(k) + v(k) > 1 - \varepsilon = (1-2\varepsilon) + \varepsilon \ge |x(n) + v(n)|$ per ogni $n \ne k$. Quindi, per ogni tale v,

$$\frac{\|x+v\| - \|x\| - v(k)}{\|v\|} = \frac{\big(x(k)+v(k)\big) - 1 - v(k)}{\|v\|} = 0\,.$$

La dimostrazione è completa. □

Esercizio. Dimostrate che l'insieme dei punti in cui la norma di ℓ_∞ è Fréchet differenziabile è aperto e denso in ℓ_∞.