REGISTRO DI **ANALISI CONVESSA**
L. Vesely, 2012–2013, II semestre

04/03/2013 [2 ore: 1,2]

- Breve introduzione al corso.

- Segmenti e rette. Insiemi convessi, affini, lineari. Iperpiani: definizione; iperpiani come insiemi di livello di funzionali lineari.

- Combinazioni convesse, affini, lineari. Dimensione di un insieme affine; dimensione (algebrica) di un insieme A ($\dim(A) := \dim[\mathrm{aff}(A)]$). Involucri: l'involucro convesso come l'insieme di tutte le combinazioni convesse.

- *Teorema di Carathéodory*: in dimensione d, l'involucro convesso di un insieme coincide con l'insieme di tutte le combinazioni convesse di al più $d+1$ punti dell'insieme [dimostrazione la prossima volta].
Corollario: in uno spazio normato di dimensione finita, l'involucro convesso di un insieme compatto è compatto.

08/03/2013 [2 ore: 3,4]

- Dimostrazione del teorema di Carathéodory (v. il file *Insiemi e involucri convessi, affini, lineari* sulla mia pagina web).

- **Teorema.** *Per uno spazio normato X le seguenti sono equivalenti:*
(i) *X è uno spazio di Banach;*
(ii) *ogni serie assolutamente convergente di elementi di X converge in X.*
Dimostrazione. L'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ è facile: se $\sum_n \|x_n\| < +\infty$ allora le somme parziali della serie $\sum_n x_n$ formano una successione di Cauchy.
Per dimostrare l'altra implicazione, supponiamo (ii) e prendiamo una successione $\{x_n\} \subset X$ di Cauchy. Essa ammete una sottosuccessione $\{x_{n(k)}\}$ tale che $\|x_{n(k+1)} - x_{n(k)}\| \leq 2^{-k}$ per ogni k. Essendo quest'ultima la successione delle somme parziali della serie telescopica $x_{n(1)} + \sum_{k=1}^{+\infty}(x_{n(k+1)} - x_{n(k)})$ che converge assolutamente, la sottosuccessione $\{x_{n(k)}\}$ converge in X. Da ciò segue che anche $\{x_n\}$ converge in X. *[q.e.d.]*

- Esempio di un insieme compatto $K \subset \ell_2$ il cui involucro convesso non è compatto.

- Primi cenni su *spazi vettoriali topologici* (s.v.t.) - si veda anche il file *Cenni su spazi vettoriali topologici.*

- *Esercizio.* Sia $V \in \mathcal{U}(0)$ (in uno s.v.t.). Dimostrare che V assorbe ogni punto di X, cioè,
$$\forall x \in X \ \ \exists t_0 > 0 : \quad x \in tV \text{ per ogni } t \geq t_0.$$

- Due teoremi base [non dimostrati].
  - *Ogni isomorfismo algebrico tra $\mathbb{R}^d$ e uno s.v.t. T_2 di dimensione d è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici (cioè, è un omeomorfismo lineare).*
  - *Ogni sottospazio finito-dimensionale in uno s.v.t. T_2 è chiuso.*

- **Corollario.** Sia K un insieme compatto in uno s.v.t. T_2. Se K è finito-dimensionale allora $\mathrm{conv}(K)$ è compatto.

- *Interno relativo* di un insieme A (in uno s.v.t.) è il suo interno rispetto al suo involucro affine:
$$\mathrm{ri}(A) := \mathrm{int}_{\mathrm{aff}(A)} A.$$

- **Teorema dell'interno relativo non vuoto.** *Sia C un insieme convesso in uno s.v.t. T_2. Se C è finito-dimensionale allora* $\mathrm{ri}(C) \neq \emptyset$.
(La dimostrazione per spazi normati, contenuta nel file *Spazi normati di dimensione finita*, funziona anche nel caso generale.)

11/03/2013 [2 ore: 5,6]

- *Esercizio.* La chiusura di un insieme convesso (in uno s.v.t.) è un insieme convesso.

- *Ripasso.*
Un insieme A in uno spazio metrico è detto *totalmente limitato* (o *precompatto*) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito $A_0 \subset A$ tale che $A \subset \bigcup_{y \in A_0} B^\circ_\varepsilon(y)$, dove $B^\circ_\varepsilon(y)$ denota la bolla aperta di raggio ε centrata in y.
E' ben noto il seguente
Teorema. *In uno spazio metrico, un insieme A è compatto se e solo se A è totalmente limitato e completo.*

- **Definizione.** Siano X uno s.v.t., $\emptyset \neq A \subset X$. Diciamo che A è *totalmente limitato* se per ogni $V \in \mathcal{U}(0)$ esiste un insieme finito $A_0 \subset A$ tale che $A \subset A_0 + V$.

- *Due esercizi.* Sia A un insieme non vuoto in uno s.v.t. X. Nella dimostrazione dei seguenti due esercizi potrebbe essere utile la proprietà base degli s.v.t.: $\forall U \in \mathcal{U}(0)\ \exists V \in \mathcal{U}(0) : V + V \subset U$.
  (i) A è totalmente limitato se e solo se $\overline{A}$ è totalmente limitato.
  (ii) La definizione di totale limitatezza può essere equivalentemente enunciata sostituendo le parole *un insieme finito* $A_0 \subset A$ con

  un insieme finito $A_0 \subset X$

  oppure con

  un insieme totalmente limitato $A_0 \subset A$.

- Se A è compatto allora A è totalmente limitato, ma non vale il vice versa.

- **Teorema.** *Sia A un insieme totalmente limitato in uno s.v.t. X. Se X è T_2 e localmente convesso (cioè, ogni intorno di* 0 *contiene un intorno convesso di* 0*), allora* $\text{conv}(A)$ *è totalmente limitato.*

  Dim. Dato $V \in \mathcal{U}(0)$, sia $W \in \mathcal{U}(0)$ convesso contenuto in V. Sia $A_0 \subset A$ un insieme finito con $A \subset A_0 + W$. Se $x = \sum_1^n \lambda_i a_i$ è una comb. convessa di elementi di A, esistono punti $y_i \in A_0$ tali che $a_i - y_i \in W$ $(1 \leq i \leq n)$. Ponendo $y = \sum_1^n \lambda_i y_i$, abbiamo $y \in \text{conv}(A_0)$ e $x - y = \sum_1^n \lambda_i (a_i - y_i) \in \text{conv}(W) = W \subset V$. Ciò dimostra che

  $$\text{conv}(A) \subset \text{conv}(A_0) + V.$$

  Siccome X è T_2, l'insieme $\text{conv}(A_0)$ è compatto. Applicare l'Esercizio (ii) sopra. *[q.e.d.]*

- **Corollario.** *Se X è uno spazio di Banach e $K \subset X$ è compatto, allora anche* $\overline{\text{conv}}(K)$ *è compatto.*
  (Notazione: $\overline{\text{conv}}(K)$ è *la chiusura convessa*, o *l'involucro convesso chiuso*, di K, definito come l'insieme più piccolo tra tutti i convessi chiusi contenenti K. E' facile vedere che $\overline{\text{conv}}(K) = \overline{\text{conv}(K)}$.)

- *Osservazione.* Se C è convesso (in uno s.v.t.), $x \in \text{int}\, C$, $y \in C$, allora $[x, y) \subset \text{int}\, C$.
  Corollario. L'interno (topologico) di un insieme convesso è convesso.

- **Definizione.** Siano X uno spazio topologico, $\emptyset \neq A \subset X$.
  (a) A è *mai denso* $\equiv$ $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

(b) A è di *I categoria (di Baire)* $\equiv$ $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ con gli A_n tutti mai densi.
(c) A è di *II categoria (di Baire)* $\equiv$ A non è di I categoria.
(d) X è uno *spazio di Baire* $\equiv$ ogni sottoinsieme aperto non vuoto di X è di II categoria.

- **Teorema.** *Sia X uno spazio topologico. Consideriamo le seguenti affermazioni.*
(i) *X è uno spazio di Baire.*
(ii) *Intersezione di ogni successione di aperti densi in X è anch'essa un insieme denso in X.*
(iii) *X non può essere espresso come unione numerabile di chiusi privi di punti interni.*
(iv) *X è di II categoria di Baire.*
Tra le affermazioni (i)–(iv) *valgono solamente le implicazioni:*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

Dimostrazione.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Se la (ii) è falsa, esistono aperti densi $G_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ tali che $G := \left[\overline{\bigcap_n G_n}\right]^c \neq \emptyset$. L'insieme aperto G soddisfa: $G \subset [\bigcap_n G_n]^c = \bigcup_n G_n^c$. L'ultimo insieme è di I categoria in quanto i G_n^c sono chiusi senza punti interni. Quindi G è di I categoria e la (i) è falsa.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Se la (i) è falsa, esiste un aperto non vuoto $G \subset X$ di I categoria, cioè, $G = \bigcup_n A_n$ con $\mathrm{int}(\overline{A_n}) = \emptyset$ per ogni n. Allora gli insiemi $H_n := (\overline{A_n})^c$ sono aperti e densi. Ora, $G \cap \bigcap_n H_n \subset G \cap \bigcap_n A_n^c = G \cap [\bigcup_n A_n]^c = G \cap G^c = \emptyset$, e quindi $\bigcap_n H_n$ non è densa e la (ii) è falsa.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Se la (iii) è falsa, possiamo scrivere $X = \bigcup_n F_n$ con gli F_n chiusi senza punti interni. Allora gli insiemi $G_n = F_n^c$ sono aperti densi e soddisfano $\emptyset = X^c = \bigcap_n F_n^c = \bigcap_n G_n$, e quindi la (ii) è falsa.
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$. E' un facile esercizio.
$(iv) \not\Rightarrow (i)$. Si consideri $X = (0,1) \cup \left[(2,3) \cap \mathbb{Q}\right]$ (con la topologia euclidea). Dal teorema di Baire (v. sotto) segue che X è di II categoria. Ma X non è di Baire, in quanto il suo aperto non vuoto $G := (2,3) \cap \mathbb{Q}$ è di I categoria. *[q.e.d.]*

- *Esercizio.* Dimostrare o confutare:
X (uno spazio topologico) è di II categoria se e solo se ogni successione di aperti densi in X ha l'intersezione non vuota.

- **Teorema di Baire.** *Uno spazio topologico di Hausdorff X è uno spazio di Baire se esso soddisfa almeno una delle seguenti condizioni:*
  (a) *X è uno spazio metrico completo;*
  (b) *X è uno spazio topologico compatto;*
  (b') *X è uno spazio topologico localmente compatto (cioè, ogni punto di X ha un intorno compatto).*

- Concludiamo con una definizione. Siano X uno s.v., $A \subset X$, $x_0 \in A$. Diciamo che x_0 è un punto dell'*interno algebrico* di A, e scriviamo $x_0 \in \text{a-int}\, A$, se
$$\forall v \in X \ \exists \delta > 0 : \quad x_0 + tv \in A \text{ per ogni } t \in [0, \delta)$$
[equivalentemente, per ogni retta L passante per x_0, $x_0 \in \text{int}_L(A \cap L)$].
Si noti l'inclusione $\text{int}\, A \subset \text{a-int}\, A$.

15/03/2013 [2 ore: 7,8]

- **Teorema.** *Siano X uno s.v.t., $C \subset X$ un insieme convesso. Allora*
$$\text{int}\, C = \text{a-int}\, C$$
a patto che valga almeno una delle seguenti:
  (a) $\text{int}\, C \neq \emptyset$*;*
  (b) *X è T_2,* $\dim(C) < \infty$*;*
  (c) *X è di Banach, C è del tipo F_σ.*

- **Teorema.** *Sia C un insieme convesso in uno s.v.t. X.*
  (a) *Se* $\text{int}\, C \neq \emptyset$*, allora* $\overline{C} = \overline{\text{int}\, C}$.
  (b) *Se b1)* $\text{int}\, C \neq \emptyset$ *oppure b2) X è T_2 e* $\dim(C) < \infty$*, allora* $\text{int}\, C = \text{int}(\overline{C})$.

- *Esercizio.* Sia A un insieme in uno s.v.
  (a) A è convesso $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha, \beta > 0$: $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.
  (b) Siano X normato e A aperto o chiuso. Allora:
  A è convesso $\Leftrightarrow$ $A + A = 2A$.

- **Mappe affini, funzioni convesse.** - per dettagli si veda il relativo file. Definizione di *mappa affine*, caratterizzazioni. Mappe *c-affini* (definite tramite combinazioni convesse) su insiemi convessi e la loro relazione con mappe affini.

Per $f: C \to \overline{\mathbb{R}}$: definizione di *funzione propria*, di *dominio effettivo*, di *funzione convessa* (tramite l'*epigrafo*), di *funzione concava*. Caratterizzazione di funzioni convesse con la disuguaglianza di Jensen per due punti e per n punti.

Osservazione. Sia $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa. Se $J := f^{-1}(-\infty)$ non è vuoto, allora: J è un intervallo, $\mathrm{dom}(f) \subset \partial J$ (e quindi f è finita in al massimo due punti), $f \equiv +\infty$ su $\mathbb{R} \setminus \overline{J}$.
Ciò mostra che le funzioni convesse che assumono il valore $-\infty$ sono molto particolari. Per questo motivo, d'ora in poi considereremo soltanto funzioni convesse a valori in $(-\infty, +\infty]$.

La famiglia delle funzioni convesse (su un insieme convesso dato) è chiusa rispetto ai multipli non negativi, alle somme finite, ai "sup" qualsiasi.

18/03/2013 [2 ore: 9,10]

- *Osservazione.* Se $f: C \to \overline{\mathbb{R}}$ è convessa (dove C è un insieme convesso in uno s.v. X), allora anche la sua estensione, definita con $f(x) = +\infty$ su $X \setminus C$, è convessa.

- *Lemma.* Ogni s.v.t. ammette una base di $\mathcal{U}(0)$ i cui elementi sono bilanciati (cioè, $\alpha V \subset V$ se $|\alpha| \leq 1$).

- **Teorema sulla continuità di funzionali lineari in spazi vettoriali topologici** – si veda il file *Cenni su spazi vettoriali topologici*. Inoltre, se lo spazio X è normato, allora le condizioni (i)-(viii) sono equivalenti a ciascuna delle seguenti:
  (ix) $\|\ell\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |\ell(x)| < +\infty$;
  (x) ℓ è lipschitziano.

- **Corollario.** Per ogni spazio normato X di dimensione infinita, esiste un funzionale lineare discontinuo su X.

- *Esercizio*.* Dimostrare lo stesso per s.v.t. metrizzabili.

Continuità di funzioni convesse in spazi normati

- **Lemma.** In uno spazio normato, sia $f\colon B^\circ(x_0) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora, per ogni $\varepsilon \in (0, r)$, valgono le implicazioni

  $$f \le m \;\Rightarrow\; |f| \le M \;\Rightarrow\; f \text{ è } L\text{-lipschitziana su } B^\circ_{r-\varepsilon}(x_0),$$

  dove $M = 2|f(0)| + |m|$, $L = 2M/\varepsilon$.
- **Teorema sulla continuità di funzioni convesse** – si veda il relativo file.
- **Corollario.** *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, $C \subset X$ un aperto convesso. Allora ogni funzione convessa $f\colon C \to \mathbb{R}$ è continua.*
- *Esempio.* In $\mathbb{R}^d$ $(d \ge 1)$, ogni funzione $f\colon \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R}$, tale che $f \equiv 0$ in $B^\circ_1(0)$ e $f(x) \ge 0$ per $\|x\| = 1$, è convessa. In particolare, i risultati precedenti non valgono per insiemi non aperti.
- *Esempio.* Sia X uno spazio normato di dimensione infinita. Sia $\ell \in X^\sharp \setminus X^*$. Allora la funzione $f(x) = |\ell(x)|$ è convessa (a valori finiti), discontinua, limitata inferiormente.

22/03/2013 [2 ore: 11,12]

- *Approfondimento.* Il teorema base sulla continuità di funzioni convesse su aperti convessi vale anche per spazi vettoriali topologici, con opportune modifiche. (Si veda il relativo file.)
- **Corollario** ***dell'ultimo Corollario*****.** Sia C un insieme convesso <u>finito-dimensionale</u> in uno spazio normato. Allora ogni funzione convessa $f\colon C \to \mathbb{R}$ è continua (addirittura localmente lipschitziana) su $\operatorname{ri} C$, l'interno relativo di C (che è non vuoto).
- **Funzioni semicontinue.** Sia T uno spazio topologico. Una funzione $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ è *inferiormente semicontinua* (*l.s.c.*, dall'inglese "lower semicontinuous") in un punto $x_0 \in T$ se

  $$\forall\, \mathbb{R} \ni t < f(x_0)\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0):\quad t < f(x) \text{ per ogni } x \in U.$$

  La funzione f è detta *superiormente semicontinua* (*u.s.c.*, "upper semicontinuous") in x_0 se $(-f)$ è l.s.c. in x_0.

  E' un facile (ma utile) esercizio di topologia generale dimostrare la seguente caratterizzazione.

  Teorema. *Per T, f come sopra, le seguenti sono equivalenti:*

(i) *f è l.s.c.;*
(ii) *gli insiemi del tipo $\{f > t\}$ sono aperti;*
(iii) *gli insiemi del tipo $\{f \leq t\}$ sono chiusi;*
(iv) $\mathrm{epi}(f)$ *è chiuso;*
(v) *per ogni $x_0 \in T$, $f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$, dove il* minimo limite *è definito da*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x)\,.$$

Teorema (à la Weierstrass)**.** *Se T è uno spazio topologico compatto, allora ogni funzione l.s.c. $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ ammete minimo.*

Dimostrazione. Se $\inf f(T) = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, si prenda una successione $\{\alpha_n\}$ in $\mathbb{R}$ tale che $\alpha_n \searrow \inf f(T)$ e si considerino gli insiemi $F_n = \{f \leq \alpha_n\}$. ...

- Il teorma sulla continuità di funzioni semicontinue – si veda il relativo file.
  Esempio che l'ipotesi di completezza non può essere omessa (nell'implicazione "convessa+l.s.c. $\Rightarrow$ continua"):
  $f(x) = \sum_1^{+\infty} |x_n|,\ \ x = (x_n) \in c_{00}$.

- **Famiglie di funzioni convesse continue in spazi di Banach**
  - si veda il relativo file.
  Come corollario, il teorema di Banach–Steinhaus (pricipio di uniforme limitatezza) per operatori.

- *Esercizio.* Siano C un insieme convesso in uno spazio normato X, $\delta > 0$. Allora gli insiemi

$$D_1 = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, C) < \delta\}$$
$$D_2 = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, C) \leq \delta\}$$
$$D_3 = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, X \setminus C) > \delta\}$$
$$D_4 = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, X \setminus C) \geq \delta\}$$

sono convessi. Inoltre, D_i è aperto per i dispari, chiuso per i pari.

25/03/2013 [2 ore: 13,14]

Teoremi di Hahn–Banach (teoremi di separazione)

- **Teorema** ("Hahn–Banach algebrico"). *Siano A, B due insiemi convessi non vuoti in uno s.v. X. Se* a-int $A \neq \emptyset$ *e* (a-int $A) \cap B = \emptyset$, *allora esiste $\varphi \in X^\sharp \setminus \{0\}$ tale che*
$$\sup \varphi(A) \leq \inf \varphi(B),$$
cioè, A, B possono essere separati (non strettamente) da un iperpiano. Inoltre, in tal caso, $\varphi(a) < \inf \varphi(B)$ per ogni $x \in$ a-int A.
- **Teorema** ("Hahn–Banach topologico"). *Siano A, B due insiemi convessi non vuoti in uno s.v.t. X.*
  (a) *Se* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ *e* $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$, *allora esiste $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ tale che*
  $$\sup \varphi(A) \leq \inf \varphi(B)$$
  cioè, A, B possono essere separati da un iperpiano chiuso. Inoltre, in tal caso, $\varphi(a) < \inf \varphi(B)$ per ogni $x \in$ $\operatorname{int} A$.
  (Segue dal teorema precedente).
  (b) *Se X è localmente convesso, A, B sono disgiunti, A è compatto e B è chiuso, allora esiste $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ tale che*
  $$\sup \varphi(A) < \inf \varphi(B),$$
  cioè, A, B possono essere strettamente separati da un iperpiano chiuso. (Segue dal caso (a): esiste $V \in \mathcal{U}(0)$ con $(A+V) \cap B = \emptyset$; separare $\widetilde{A}$ e B.)
- **Teorema** ("Hahn–Banach specifico per dimensione finita"). *Siano X uno s.v.t. localmente convesso T_2, $A, B \subset X$ due insiemi convessi finito-dimensionali. Se $(ri\, A) \cap (ri\, B) = \emptyset$ (in particolare, se A, B sono disgiunti), allora esiste $\varphi \in X^*$ tale che*
$$\sup \varphi(A) \leq \inf \varphi(B)\,, \quad \inf \varphi(A) < \sup \varphi(B)\,.$$
(Si noti che la seconda disuguaglianza significa che φ non è costante su $A \cup B$, e quindi c'è davvero una separazione.)
- **Corollario.** *Siano X uno s.v.t., $C \subset X$ insieme convesso chiuso, $x_0 \in X$.*
  (a) *Se* $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ *e $x_0 \in \partial C$, allora esiste $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ con $\varphi(x_0) =$* $\max \varphi(C)$. *(In questo caso, l'iperpiano $\varphi^{-1}(\varphi(x_0))$ è detto* iperpiano di supporto *a C in x_0.)*
  (b) *Se $x_0 \notin C$, allora esiste $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ con $\varphi(x_0) > \max \varphi(C)$.*

Punti estremi

- Sia C un insieme convesso in uno s.v. Diciamo che un punto $x \in C$ è un *punto estremo* di C, e scriviamo $x \in \operatorname{ext} C$, se vale l'implicazione
$$x = (1-\lambda)y + \lambda z \text{ con } y, z \in C,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad x = y = z.$$

- *Osservazione.* Siano X, C come sopra, $x \in C$. Allora sono equivalenti:
  (i) $x \in \operatorname{ext} C$;
  (ii) $\big[x = \frac{y+z}{2} \text{ con } y, z \in C \quad \Rightarrow \quad x = y = z\big]$;
  (iii) $\big[x = \sum_1^n \lambda_i y_i \text{ con } y_i \in C,\ \lambda_i > 0,\ \sum_1^n \lambda_j = 1 \ \Rightarrow\ x = y_i\ \forall i\big]$.

- *Ulteriori osservazioni.*
  (a) $\operatorname{ext} C \subset C \setminus \text{a-int}\, C$ per ogni insieme convesso C. Più precisamente, $\operatorname{ext} C \subset C \setminus \text{a-ri}\, C$ per ogni insieme convesso C non singoletto (dove $\text{a-ri}\, C$ denota l'interno relativo algebrico, cioè, l'interno algebrico di C nel suo involucro affine).
  (b) Per ogni convesso chiuso $C \subset \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ext} C$ è chiuso.
  (c) Per un convesso chiuso $C \subset \mathbb{R}^d$ con $d > 2$, $\operatorname{ext} C$ può non essere chiuso. (Si consideri, in $\mathbb{R}^3$, una circonferenza γ e un segmento S, perpendicolare a γ e avente con essa in comune il suo punto medio m. Allora il convesso compatto $C := \operatorname{conv}(\gamma \cup S)$ soddisfa: $\gamma \setminus \{m\} \subset \operatorname{ext} C$ e $m \notin \operatorname{ext} C$.)

- **Proposizione (Choquet).** *Siano X uno s.v.t. e $K \subset X$ un convesso compatto metrizzabile. Allora* $\operatorname{ext} K$ *è del tipo G_δ in K (in X, se X è metrizzabile).*

- **Due esempi patologici.**
  (a) [Bishop–de Leuw] *Per un compatto convesso K in uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff, l'insieme* $\operatorname{ext} K$ *può non essere boreliano.*
  (b) [Roberts] *Nello s.v.t. $X = L_{1/2}[0,1]$ (che è metrizzabile, non localmente convesso), esiste un compatto convesso $K \neq \emptyset$ con* $\operatorname{ext} K = \emptyset$.

- **Teorema (Minkowski).** *Siano X uno s.v.t. T_2 (ad es. uno spazio normato), $K \subset X$ un compatto convesso finito-dimensionale. Allora $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K)$.*
  (E' una versione finito-dimensionale del teorema di Krein–Milman.)

- **Corollario.** *Siano X, K come sopra. Per un insieme $A \subset K$, le seguenti sono equivalenti:*
  (i) $K = \operatorname{conv} A$;
  (ii) $\operatorname{ext} K \subset A$.

(L'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ è una versione finito-dimensionale del teorema di Milman.)

- **Esercizio.** *Siano* X, K *come nel teorema di Minkowski sopra. Una funzione convessa* $f\colon K \to (-\infty, +\infty]$ *assume il suo massimo su* K *se e solo se lo assume in qualche punto estremo di* K.
(E' una versione finito-dimensionale del principio di massimo di Bauer.)

05/04/2013 [2 ore: 15,16]

- **Definizione.** Sia K un insieme convesso in uno s.v. Un insieme non vuoto $E \subset K$ è detto *insieme estremale* per K se vale l'implicazione
$$x, y \in K,\ \tfrac{x+y}{2} \in E \ \Rightarrow\ x, y \in E.$$

- *Osservazioni.* Siano X, K come sopra.
  (a) K è estremale per se stesso.
  (b) $\{x\}$ è estremale per $K \Leftrightarrow x \in \operatorname{ext} K$.
  (c) Se E è un insieme estremale per K e H è un iperpiano di supporto per E (cioè, $H \cap E \neq \emptyset$ ed E è contenuto in uno dei due semispazi algebricamente chiusi determinati da H), allora anche $E \cap H$ è estremale per K.

- Ripasso del *lemma di Zorn* – anche per approfondimenti, si veda il file *Assioma della scelta e lemma di Zorn.*

- **Lemma base.** *Sia* K *un compatto convesso in uno s.v.t. localmente convesso* T_2. *Allora ogni sottoinsieme estremale chiuso di* K *contiene almeno un punto estremo di* K.
Dimostrazione. Sia $E = \overline{E}$ estremale per K. Consideriamo la famiglia
$$\mathcal{S} = \{F \subset K :\ F = \overline{F} \text{ estremale per } K\}$$
parzialmente ordinata con l'inclusione. Dal lemma di Zorn segue che $\mathcal{S}$ contiene un elemento E_0 minimale. Se E_0 contenesse due elementi distinti x, y, il teorema di separazione ci darebbe un $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) > \varphi(y)$. Allora l'iperpiano $H = \varphi^{-1}(m)$, dove $m = \max \varphi(E_0)$, sarebbe un iperpiano chiuso di supporto per E_0, non contenente E_0. Allora $E_0 \cap H$ sarebbe un insieme estremale per K, strettamente contenuto in E_0, contraddicendo la minimalità di E_0. Quindi E_0 contiene un solo punto che è un punto estremo per K. *[q.e.d.]*

- **Teorema (Krein–Milman).** *Sia K un compatto convesso in uno s.v.t. localmente convesso T_2. Allora*

(1) $$K = \overline{\text{conv}}\,(\text{ext}\,K).$$

Dimostrazione. Sia C l'insieme a destra nella formula (1); chiaramente $C \subset K$. Se esiste $x \in K \setminus C$, esiste $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) > \max \varphi(C)$. Allora l'iperpiano chiuso $H = \varphi^{-1}(m)$, dove $m = \max \varphi(K)$, è di supporto per K, disgiunto da $\text{ext}\,K$ (perché disgiunto da C). Ma allora $K \cap H$ contiene un punto estremo, contraddicendo la defínzione di C. *[q.e.d.]*

- **Teorema (principio di massimo di Bauer).** *Siano X, K come nel teorema precedente. Se $f\colon K \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa u.s.c., allora f assume il suo massimo in qualche punto estremo di K.*

  Dimostrazione. L'insieme $E = \{x \in K : f(x) = \max f(K)\}$ è chiuso ed estremale per K. Quindi esso interseca $\text{ext}\,K$. *[q.e.d.]*

- *Le* nets *(successioni generalizzate)* – definizioni di: insieme diretto, una net, una subnet, limite di una net. Proprietà base:
  - uno spazio topologico X è T_2 se e solo se ogni net ha al più un limite;
  - un sottoinsieme di X è chiuso se e solo se contiene tutti i limiti dei nets di suoi punti;
  - X è compatto se e solo se ogni net in X ha una subnet convergente ad un punto di X;
  - $F\colon X \to Y$ (Y spazio topologico) è continua in $x \in X$ se e solo se vale l'implicazione $\big[\, x_\alpha \to x \Rightarrow F(x_\alpha) \to F(x) \,\big]$.

- **Proposizione.** Siano $C_1, \ldots, C_n$ insiemi convessi in uno s.v.t., $D = \text{conv}(C_1 \cup \ldots \cup C_n)$.
  (a) $D = \{\sum_1^n \lambda_i c_i : \ c_i \in C_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_1^n \lambda_j = 1\}$.
  (b) $C_1, \ldots, C_n$ tutti compatti $\Rightarrow D$ compatto.
  (c) X è T_2, $C_1, \ldots, C_{n-1}$ compatti, C_n chiuso limitato $\Rightarrow D$ chiuso.

  Idea della dimostrazione di (a). Se $x \in D$, possiamo scrivere x come una combinazione convessa (di generica lunghezza) di elementi dell'unione $C_1 \cup \ldots \cup C_n$. Dividendo tali elementi in n gruppi, nel k-esimo solo elementi appartenenti a C_k, la parte della nostra combinazione convessa che corrisponde al k-esimo gruppo può essere scritta nella forma $\lambda_k c_k$ dove $c_k \in C_k$. Si ottiene così l'espressibilità di x nella forma richiesta.
  I punti (b), (c) saranno dimostrati la prossima volta.

08/04/2013 [2 ore: 17,18]

- Ricordiamo la definizione generale di limitatezza: un insieme E in uno s.v.t. è detto *limitato* se $\forall U \in \mathcal{U}(0)\ \exists t > 0$: $E \subset tU$.

- **Esercizio** *per chi ha le basi di Analisi Funzionale.* Dimostrate che, per un insieme E in uno s.v.t., le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) E è limitato;
  (ii) $\forall U \in \mathcal{U}(0)\ \exists t_0 > 0$: $E \subset tU$ per ogni $t \geq t_0$;
  (iii) $\forall (x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset E$, $\forall (t_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}$ con $t_\alpha \to 0$: $\quad t_\alpha x_\alpha \to 0$;
  (iv) $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $\forall \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $t_n \to 0$: $\quad t_n x_n \to 0$.

- *Dimostrazione di (b), (c) della Proposizione della volta scorsa.* Osserviamo che

$$\mathrm{conv}(C_1 \cup \ldots \cup C_n) = \mathrm{conv}[\mathrm{conv}(C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1}) \cup C_n]$$

(esercizio!). Ne segue che è sufficiente dimostrare (a), (b) per $n = 2$ (il caso generale si ottiene procedendo per induzione).

<u>(b) per $n = 2$.</u> Sia $(x_\alpha) \subset D$ una net. Per ogni α,

$$x_\alpha = \lambda_\alpha c_\alpha + (1 - \lambda_\alpha) d_\alpha \quad \text{con } \lambda_\alpha \in [0, 1], c_\alpha \in C_1, d_\alpha \in C_2. \tag{2}$$

Per compattezza, esiste una subnet $(x_{\psi(\beta)})$ tale che

$$\lambda_{\psi(\beta)} \to \lambda \in [0, 1],\ c_{\psi(\beta)} \to c \in C_1,\ d_{\psi(\beta)} \to d \in C_2. \tag{3}$$

Allora $(x_{\psi(\beta)})$ converge a

$$x = \lambda c + (1 - \lambda) d \in D. \tag{4}$$

<u>*(c) per $n = 2$.*</u> Sia $(x_\alpha) \subset D$ una net tale che $x_\alpha \to x \in X$. Scriviamo di nuovo (2). Esiste una subnet $(x_{\psi(\beta)})$ tale che

$$\lambda_{\psi(\beta)} \to \lambda \in [0, 1],\ c_{\psi(\beta)} \to c \in C_1.$$

Se $\lambda < 1$, la net $d_{\psi(\beta)} = \frac{1}{1-\lambda_{\psi(\beta)}}(x_{\psi(\beta)} - \lambda_{\psi(\beta)} c_{\psi(\beta)})$ converge a $d = \frac{1}{1-\lambda}(x - \lambda c) \in C_2$, da cui (4).
Se invece $\lambda = 1$, abbiamo $(1 - \lambda_{\psi(\beta)}) d_{\psi(\beta)} \to 0$ e quindi (grazie all'unicità di limite)

$$x = \lim_\beta x_{\psi(\beta)} = \lambda c = c \in D.$$

[q.e.d.]

- *Esercizio.* Dimostrate che i punti (b),(c) della Proposizione valgono anche per $D = C_1 + \ldots + C_n$.

- *Lemma.* In ogni s.v.t. localmente convesso, ogni elemento di $\mathcal{U}(0)$ contiene un $V \in \mathcal{U}(0)$ convesso, chiuso, simmetrico.
(Idea della dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{U}(0)$. Esiste $W \in \mathcal{U}(0)$ convesso simmetrico tale che $W + W \subset U$. Basta porre $V = \overline{W}$.)

- **Teorema (Milman).** *Siano X uno s.v.t. localmente convesso T_2, e $K \subset X$ convesso compatto. Se $A \subset X$ soddisfa $K = \overline{\mathrm{conv}}\, A$, allora*
$$\overline{A} \supset \mathrm{ext}\, K.$$
(In altre parole, l'insieme $E = \overline{\mathrm{ext}\, K}$ è il più piccolo sottoinsieme chiuso di K che soddisfi $K = \overline{\mathrm{conv}}\, E$.)

  Dimostrazione. Prima osserviamo che $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}(0)} (A + V)$. Fissiamo un $V \in \mathcal{U}(0)$ convesso, chiuso, simmetrico. Siccome A è totalmente limitato, esiste un insieme finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ tale che $A \subset \bigcup_1^n (a_i + V)$. Consideriamo gli insiemi (convessi compatti)
$$K_i := K \cap (a_i + V)$$
Allora $K = \overline{\mathrm{conv}}\, A \subset \overline{\mathrm{conv}}\,\left(\bigcup_1^n K_i\right) \subset K$ e quindi (usando la Proposizione)
$$\mathrm{ext}\, K \subset \overline{\mathrm{conv}}\,\left(\bigcup_1^n K_i\right) = \mathrm{conv}\,\left(\bigcup_1^n K_i\right).$$
Sia $x \in \mathrm{ext}\, K$. Dalla Proposizione (di nuovo!) abbiamo
$$x = \sum_1^n \lambda_i y_i \qquad \text{combinazione convessa con } y_i \in K_i.$$
Poniamo $I = \big\{ i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i > 0 \big\}$. Siccome x è un punto estremo e $x = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i$ con $y_i \in K$, dobbiamo avere $x = y_i$ per ogni $i \in I$. Ne segue che $x \in a_i + V \subset A + V$ per tali i. Dall'osservazione iniziale e dall'arbitrarietà di V segue che $x \in \overline{A}$. *[q.e.d.]*

- **Corollario.** Siano X, K come nel teorema precedente. Per un insieme $A \subset K$, le seguenti sono equivalenti:
(i) $K = \overline{\mathrm{conv}}\, A$;
(ii) $\overline{A} \supset \mathrm{ext}\, K$.

- *Complementi al teorema di Krein–Milman.* In quanto segue, X è uno s.v.t. localmente convesso T_2 e $K \subset X$ un compatto convesso.

Se K ha dimensione finita, ogni punto $x \in K$ può essere scritto come una combinazione convessa

(5) $$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

di punti estremi di K. Viene naturale chiedersi se, anche nel caso generale, ogni punto di K può essere rappresentato tramite i punti estremi di K senza utilizzare limiti. Esporremo brevemente alcuni risultati importanti.

Integrale di Pettis. Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura. Sia $f\colon \Omega \to X$ una funzione misurabile (nel senso che $f^{-1}(G) \in \Sigma$ per ogni aperto $G \subset X$). Diciamo che $x \in X$ è l'*integrale di Pettis* di f su Ω, e scriviamo

$$x = (\mathcal{P})\!\int_{\Omega} f(\omega)\, d\mu(\omega)\,,$$

se

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \varphi(f(\omega))\, d\mu(\omega) \qquad \text{per ogni } \varphi \in X^*.$$

Esercizio. L'integrale di Pettis, se esiste, è unico. (Suggerimento: si applichino le nostre ipotesi su X.)

Si noti che la formula (5) equivale a dire che

$$x = (\mathcal{P})\!\int_{\operatorname{ext} K} y\, d\mu(y)$$

dove μ è la misura di probabilità $\mu = \sum_1^n \lambda_i \delta_{e_i}$ su $\operatorname{ext} K$ (dove δ_u denota la misura di Dirac concentrata nel punto u) e la funzione integranda è la funzione $f(y) = y$.

Per noi sarà importante il seguente risultato.

Teorema. Siano X, K come sopra.

(a) Se $B \subset K$ è un boreliano e μ è una misura regolare di probabilità su B, allora esiste l'integrale di Pettis

$$(\mathcal{P})\!\int_{B} y\, d\mu(y)$$

è appartiene a K.

(b) *(Forma integrale del teorema di Krein–Milman.)* Per ogni $x \in K$ esiste una (non necessariamente unica) misura regolare di probabilità μ su $\overline{\operatorname{ext} K}$ tale che

$$x = (\mathcal{P})\!\int_{\overline{\operatorname{ext} K}} y\, d\mu(y)\,.$$

Il seguente teorema di Choquet assicura, sotto l'ipotesi di metrizzabilità, l'esistenza di una μ su $\operatorname{ext} K$ (senza chiusura!).

Teorema (Choquet). Siano X, K come sopra. Se K è metrizzabile, allora $\operatorname{ext} K$ è del tipo G_δ e per ogni $x \in K$ esiste una misura regolare di probabilità μ su $\operatorname{ext} K$ tale che

$$x = (\mathcal{P})\int_{\operatorname{ext} K} y \, d\mu(y) \, .$$

Corollario. Siano X, K come sopra con K metrizzabile. Se $\operatorname{ext} K = \{e_n\}_1^{+\infty}$, allora ogni $x \in K$ può essere scritto come una "combinazione convessa infinita"

$$x = \sum_1^{+\infty} \lambda_n e_n \qquad \text{dove } \lambda_n \geq 0, \ \sum_1^{+\infty} \lambda_i = 1.$$

TOPOLOGIE DEBOLI

A. Le topologie $\sigma(X, L)$

- *Definizione.* Siano X uno s.v. e $L \subset X^\sharp$ un sottospazio (dove $X^\sharp$ denota il duale algebrico di X). Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni insieme finito $F \subset L$, consideriamo l'insieme

  $$V_{F,\varepsilon} = \{x \in X : \ |\ell(x)| < \varepsilon \text{ per ogni } \ell \in F\} \, .$$

  Se definiamo

  $$x \in \operatorname{int} E \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \ \exists F \subset L \text{ finito t.che } x + V_{F,\varepsilon} \subset E \, ,$$

  abbiamo cosí definito una (unica) topologia su X. Denoteremo tale topologia con $\sigma(X, L)$ (la "topologia debole su X determinata da L").

- **Proprietà di $\sigma(X, L)$.**
  (a) $\sigma(X, L)$ è una topologia vettoriale localmente convessa.
  (b) $\sigma(X, L)$ è $\mathrm{T}_2 \Leftrightarrow L$ separa i punti di X (cioè, per ogni $x_1 \neq x_2$ in X esiste $\ell \in L$ tale che $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$) $\Leftrightarrow {}^\perp L := \bigcap_{\ell \in L} \operatorname{Ker}(\ell) = \{0\}$.
  (c) Per una topologia τ su X, le seguenti sono equivalenti:
    (c1) $\tau = \sigma(X, L)$;
    (c2) τ è la topologia più debole che renda continui gli elementi di L;
    (c3) τ è la topologia vettoriale più debole tale che $(X, \tau)^* = L$;

(c4) τ è la topologia prodotto su X come sottoinsieme di $\mathbb{R}^L$. (Spiegazione: X può essere visto come un sottinsieme di $L^\sharp$; infatti, possiamo definire $x(\ell) := \ell(x)$. Allora $X \subset L^\sharp \subset \mathbb{R}^L = \bigoplus_{\ell \in L} \mathbb{R}$ [cioè, il prodotto cartesiano $\bigoplus_{\ell \in L} T_\ell$ con $T_\ell = \mathbb{R}$ per ogni ℓ].)

12/04/2013 [2 ore: 19,20]

- **Metrizzabilità.** Siano X uno s.v., $L \subset X^\sharp$ che separi i punti di X. Sia B_X la bolla unitaria chiusa $\overline{B}_1(0) \subset X$.
  (a) $(X, \sigma(X, L))$ è metrizzabile $\Leftrightarrow$ $\dim X$ è al più numerabile (per X normato e $L \subset X^*$ chiuso: $\Leftrightarrow \dim X < \infty$).
  (b) Per X normato: $(B_X, \sigma(X, L))$ è metrizzabile $\Leftrightarrow$ L è separabile.

B. Le topologie deboli in spazi normati

In quanto segue, X è uno spazio normato.

- Siano $x \in X$, $\varphi \in X^*$. Allora:

(6) $$\|\varphi\| = \sup_{y \in B_X} \varphi(x) , \qquad \|x\| = \max_{\psi \in B_{X^*}} \psi(x) .$$

La prima equazione in (6) è proprio la definizione della norma duale, mentre la seconda si dimostra come segue.
WLOG: $\|x\| = 1$. Chiaramente, $\sup_{\psi \in B_{X^*}} \psi(x) \leq 1$. Dall'altra parte, per il teorema di Hahn–Banach, esiste $\psi \in X^*$ tale che $1 = \psi(x) \geq \sup \psi(B_X)$, ma l'ultimo "sup" coincide con $\|\psi\|$.

- *X^* è sempre uno spazio di Banach.*
(Idea della dimostrazione: se $\{\varphi_n\} \subset X^*$ è di Cauchy, le funzioni $\varphi_n|_{B_X}$ soddisfano la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi esse convergono uniformemente ad una funzione limite; essa è la restrizione su B_X di qualche $\varphi \in X^*$ e vale $\varphi_n \to \varphi$ in X^*.)

- *Immersione canonica; riflessività.* Ad ogni $x \in X$ possiamo associare $\hat{x} \in (X^*)^\sharp$, dato da
$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x).$$
Da (6) segue che $\|\hat{x}\| = \|x\|$. Ne segue che $\hat{x} \in X^{**}$ e che l'applicazione
$$j \colon X \to X^{**}, \ x \mapsto \hat{x},$$

è un'isometria lineare. Essa viene chiamata *immersione canonica* (di X in X^{**}). Per questo potivo, possiamo considerare X come un sottospazio (chiuso se X è completo) di X^{**}.

Se $X = X^{**}$, lo spazio X viene chiamato *riflessivo*. Per la completezza di X^{**}, solo uno spazio di Banach può essere riflessivo.

- *Definizione delle topologie deboli.*
  Su X possiamo definire la topologia $w = w_X = \sigma(X, X^*)$, la *topologia debole*. Essa è una topologia vettoriale localmente convessa T_2 e soddisfa $(X, w)^* = X^*$.
  Su X^* possiamo definire:
  – la topologia debole $w = w_{X^*} = \sigma(X^*, X^{**})$, ma anche
  – la topologia $w^* = w^*_{X^*} = \sigma(X^*, X)$, la *topologia debole** ("debole star"). Anch'essa è una topologia vettoriale localmente convessa T_2 e soddisfa $(X^*, w^*)^* = X$ (più precisamente, $(X^*, w^*)^* = j(X)$ dove j è la immersione canonica di X in X^{**}).

  Si ha sempre $w \subset \tau_{\|\cdot\|}$ e l'uguaglianza vale se e solo se $\dim X < \infty$.

  In X^*, si ha sempre $w^* \subset w$ e l'uguaglianza vale se e solo se X è uno spazio di Banach riflessivo.

- *Un insieme convesso $C \subset X$ è w-chiuso se e solo se C è chiuso (nella topologia della norma).*
  (Idea della dimostrazione: se C è chiuso e $x \notin C$, esiste $\varphi \in X^*$ con $\varphi(x) > \sup \varphi(C) =: \sigma$. Allora $\{\varphi > \sigma\}$ è un w-intorno di x che non interseca C.)

  Corollario. Per $E \subset X$ si ha $\overline{\mathrm{conv}}^w E = \overline{\mathrm{conv}}\, E$.

- Compattezza.
  (a) $(B_X, \tau_{\|\cdot\|})$ *è cpt.* $\Leftrightarrow$ $\dim X < \infty$.
  (b) (B_X, w) *è cpt.* $\Leftrightarrow$ X *è uno spazio di Banach riflessivo.*
  (c) (B_{X^*}, w^*) *è <u>sempre</u> cpt.* (Banach–Alaoglu).

  In particolare:
  – ogni insieme w^*-chiuso limitato in X^* è w^*-compatto;
  – ogni insieme w-chiuso limitato in uno spazio di Banach riflessivo è w-compatto;
  – ogni insieme convesso chiuso limitato in uno spazio di Banach riflessivo è w-compatto.

  Per quanto riguarda (b), si può dire un po' di più.
  Per uno spazio di Banach, le seguenti sono equivalenti:
  (i) X *è riflessivo;*
  (ii) B_X *è w-compatta;*

(iii) B_X *è w-compatta per successioni* (Eberlein–Šmulian, un teorema per niente facile)*;*
(iv) $\forall\varphi \in X^*$*:* $\|\varphi\| = \max\varphi(B_X)$*, cioè* φ *assume la sua norma* (James, un teorema difficilissimo).

- **Corollario.**
  (a) Per ogni spazio normato X, $B_{X^*} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(\mathrm{ext}\, B_{X^*})$.
  (b) Se X è uno spazio di Banach riflessivo e $C \subset X$ è un insieme convesso chiuso limitato, allora $C = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}\, C)$.
  (c) Se X è normato e $\mathrm{ext}\, B_{X^*}$ è finito, allora $\dim X < \infty$. [segue da (a)]
  (d) Se X è uno spazio di Banach infinito-dimensionale con $\mathrm{ext}\, B_X$ finito, allora X non è (isometrico a) uno spazio duale. [segue da (c)]

- **Esempi ed esercizi.**
  (a) La bolla unitaria di c_0 non ha punti estremi. Quindi, c_0 non è un duale.
  (b) La bolla unitaria di $C[0,1]$ ha solo due punti estremi: le funzioni costanti ± 1. Quindi, $C[0,1]$ non è un duale.
  (c) *Esercizio.* Dimostrare che la bolla unitaria di $L_1[0,1]$ non ha punti estremi.
  (d) *Esercizio.* Determinare i punti estremi di B_X per $X = \ell_1$ e per $X = \ell_\infty$.
  (e) *Esercizio.* Determinare i punti estremi di B_X per $X = c$ e dimostrare che $B_c = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}\, B_c)$. Dall'altra parte, è noto che c non è (neanche isomorfo a) un duale.

- *Teorema di Goldstine.*
  B_X *è w^*-densa in* X^{**}. In particolare, X è w^*-denso in X^{**}.

- *Metrizzabilità.*

$$\begin{array}{ccc} (B_X, w) \text{ metrizzabile} & \Leftrightarrow & X^* \text{ separabile} \\ & & \Downarrow \not\Uparrow \\ (B_{X^*}, w^*) \text{ metrizzabile} & \Leftrightarrow & X \text{ separabile} \end{array}$$

- *Involucri convessi.* Siano X uno spazio di Banach, $D \subset X$, $E \subset X^*$.
  (a) D *è compatto* $\Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}\, D$ *è compatto* (lo sappiamo già).
  (b) D *è w-compatto* $\Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}^w D$ *è w-compatto* (questo è un teorema).
  (c) E *è w^*-compatto* $\Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}^{w^*} E$ *è w^*-compatto* (segue dal fatto che, per il teorema di uniforme limitatezza, E è limitato, e dal teorema di Banach–Alaoglu).

15/04/2013 [2 ore: 21,22]

- **Corollario.** *Siano X uno spazio di Banach riflessivo e $C_1, \ldots, C_n \subset X$ insiemi convessi chiusi e limitati. Allora gli insiemi*
$$D = \mathrm{conv}(C_1 \cup \ldots \cup C_n)\,, \quad E = C_1 + \ldots + C_n$$
sono chiusi.
(Idea: C_i sono tutti w-compatti, quindi D, E sono w-compatti [secondo la Proposizione del 5/4/2013 e l'Esercizio dopo la sua dimostrazione]; essendo w-chiusi, essi sono $\tau_{\|\cdot\|}$-chiusi.)

- In questo punto, X è uno spazio normato, $(x_\alpha) \subset X$ una net, $\{x_n\} \subset X$ una successione, $x \in X$, e similmente $(\varphi_\alpha) \subset X^*$ una net, $\{\varphi_n\} \subset X^*$ una successione, $\varphi \in X^*$.
  (a) $x_\alpha \stackrel{w}{\to} x \Leftrightarrow \forall \varphi : \varphi(x_\alpha) \to \varphi(x)$.
  (b) $\varphi_\alpha \stackrel{w^*}{\to} \varphi \Leftrightarrow \forall x : \varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$.
  (c) $\{x_n\}$ w-convergente $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ limitata (dal Principio di Uniforme Limitatezza).
  (d) $\{\varphi_n\}$ w^*-convergente, X Banach $\Rightarrow$ $\{\varphi_n\}$ limitata (idem).
  (e) $x_\alpha \stackrel{w}{\to} x$, (x_α) limitata, $\varphi_\alpha \stackrel{\|\cdot\|}{\to} \varphi \Rightarrow \varphi_\alpha(x_\alpha) \to \varphi(x)$.
  (f) $x_\alpha \stackrel{\|\cdot\|}{\to} x$, $\varphi_\alpha \stackrel{w^*}{\to} \varphi$, (φ_α) limitata $\Rightarrow \varphi_\alpha(x_\alpha) \to \varphi(x)$.
  (g) $x_n \stackrel{w}{\to} x$, $\varphi_n \stackrel{w^*}{\to} \varphi$, X Banach $\not\Rightarrow \varphi_\alpha(x_\alpha) \to \varphi(x)$.
  (Si consideri, ad esempio, $X = c_0$, $x_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ [con 1 all'n-esimo posto], $\varphi_n(y) := y_n$. Allora: $x_n \stackrel{w}{\to} 0$ [segue dal noto fatto che ogni $\varphi \in (c_0)^*$ è del tipo $\varphi(y) = \sum_1^{+\infty} u_n y_n$ con $(u_n) = u \in \ell_1$], $\varphi_n \stackrel{w^*}{\to} 0$, ma $\varphi_n(x_n) \not\to 0$.)

Teorema di Helly, sue applicazioni, suoi "parenti"

- **Definizione.** Una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ si dice *k-centrata* se ogni sua sottofamiglia (non vuota) di cardinalità minore o uguale a k ha intersezione non vuota. (Le parole "minore o uguale a" servono per le famiglie di meno di k elementi.)
Diciamo che $\mathcal{F}$ è *centrata* se essa è k-centrata per ogni $k \in \mathbb{N}$.

- **Osservazione.** *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia centrata di chiusi in uno spazio topologico. Se esiste una sottofamiglia finita $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ la cui intersezione sia compatta, allora $\mathcal{F}$ ha intersezione non vuota.*
(Dimostrazione. Sia $C = \bigcap \mathcal{F}_0$. Allora la famiglia $\mathcal{G} := \{F \cap C : F \in \mathcal{F}\}$ è una famiglia centrata di chiusi nel compatto C. Per la nota caratterizzazione della compattezza, $\bigcap \mathcal{G} = \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.)

- **Teoremino** (Helly in una dimensione). *Ogni famiglia 2-centrata e finita di intervalli in $\mathbb{R}$ ha intersezione non vuota.*

  (Per una dimostrazione elementare si veda il file *Teorema di Helly.*)

- La dimostrazione della seguente Proposizione può esse trovata nel file *Teorema di Helly* (nella dimostrazione del teorema di Helly).

  Proposizione ("succo" del teorema di Helly). *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia $(n-1)$-centrata di n insiemi convessi in $\mathbb{R}^d$. Se $n > d+1$, allora $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

- **Teorema di Helly** ("Helly's Intersection Theorem").
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia $(d+1)$-centrata di insiemi convessi in $\mathbb{R}^d$. Supponiamo che valga almeno una delle seguenti affermazioni:
  (a) *$\mathcal{F}$ è finita;*
  (b) *gli elementi di $\mathcal{F}$ sono chiusi ed esiste una sottofamiglia finita $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ avente intersezione limitata.*
Allora $\mathcal{F}$ ha intersezione non vuota.

  Dimostrazione. Dalla Proposizione, procedendo per induzione per $n \geq d+2$, si deduce che $\mathcal{F}$ è centrata. *[q.e.d.]*

- I seguenti Teorema e Corollario verranno dimostrati la prossima volta.

  Teorema (della trasversale comune, o "dello spiedino").
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di segmenti compatti (non necessariamente non degeneri) in $\mathbb{R}^2$, paralleli tra loro. Se ogni tre elementi di $\mathcal{F}$ sono intersecati da una retta, allora esiste una retta che intersechi tutti gli elementi di $\mathcal{F}$.

  Corollario ("sandwich theorem"). *Siano: $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, $f \leq g$. Allora le seguenti sono equivalenti:*
  (i) $\exists\, a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *affine t. che $f(x) \leq a(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$;*
  (ii) $\forall\, x, y, z \in E$ *t. che $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ con $\lambda \in (0,1)$:*
$$\begin{cases} f(z) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y), \\ g(z) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{cases}$$

- **Esercizio.** Dimostrare che, per $E \subset \mathbb{R}$ intervallo, la condizione (ii) del Corollario è soddisfatta, ad es., se una delle due funzioni f, g è convessa e l'altra concava (in qualsiasi ordine).

19/04/2013 [2 ore: 23,24]

- *Dimostrazione del Teorema "dello spiedino" e del Corollario ("sandwich")* – si veda il file *Teorema di Helly.*

- **Generalizzazioni.** Le dimostrazioni del punto precedente possono essere facilmente (a meno di difficoltà tecniche) generalizzate per ottenere i seguenti teoremi.
  1. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di segmenti compatti in $\mathbb{R}^d$, paralleli tra loro, tali che ogni $d+1$ o meno elementi di $\mathcal{F}$ siano intersecati da un iperpiano. Allora esiste un iperpiano che intersechi tutti gli elementi di $\mathcal{F}$.*
  2. ("Sandwich") *Siano $E \subset \mathbb{R}^d$, $f, g \colon E \to \mathbb{R}$, $f \leq g$. Allora le seguenti sono equivalenti:*
  (i) *esiste $a \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ affine tale che $f \leq a|_E \leq g$;*
  (ii) $\forall x_1, \ldots, x_{d+1} \in E \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1} \geq 0$ *con* $\sum_1^{d+1} \lambda_i = 1$ *e* $z := \sum_1^{d+1} \lambda_i x_i \in E$:
  $$\begin{cases} f(z) \leq \sum_1^{d+1} \lambda_i g(x_i), \\ g(z) \geq \sum_1^{d+1} \lambda_i f(x_i). \end{cases}$$

- **Alcune applicazioni del Teorema di Helly.** *Siano $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$, $B \subset \mathbb{R}^d$ un limitato, $Y \subset \mathbb{R}^d$ un sottospazio di dimensione k.*
  (A) *Supponiamo che gli elementi di $\mathcal{F}$ siano tutti chiusi e convessi, almeno uno di essi compatto. Se ogni $d+1$ o meno elementi di $\mathcal{F}$ contengono uno stesso traslato di B, allora $\bigcap \mathcal{F}$ contiene un traslato di B.*
  (B) *Supponiamo che B sia convesso e compatto. Se ogni $d+1$ o meno elementi di $\mathcal{F}$ sono contenuti in uno stesso traslato di B, allora $\bigcup \mathcal{F}$ è contenuta in un traslato di B.*
  (C) *Supponiamo che gli elementi di $\mathcal{F}$ siano tutti chiusi e convessi, e per almeno uno di essi la sua proiezione ortogonale su $Y^\perp$ sia limitata. Se ogni $d-k+1$ o meno elementi di $\mathcal{F}$ contengono uno stesso traslato di Y, allora $\bigcap \mathcal{F}$ contiene un traslato di Y.*

Idea della dimostrazione.
Applicare il Teorema di Helly alla famiglia $\{C_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ dove:
(A) $C_F = \{x \in \mathbb{R}^d : x + B \subset F\}$ in $\mathbb{R}^d$,
(B) $C_F = \{x \in \mathbb{R}^d : F \subset x + B\}$ in $\mathbb{R}^d$,
(C) $C_F = \{z \in Y^\perp : z + Y \subset F\}$ in $Y^\perp$ (si noti che $\dim Y^\perp = d - k$).

Si noti che (A) per $B = \{x_0\}$, e anche (C) per $k = 0$, equivale a una versione del Teorema di Helly.

- Per alcune ulteriori applicazioni del Teorema di Helly si veda il file *Esercizi sul Teorema di Helly.*

- **Teorema** ("alla Klee"). *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia n-centrata di $n+1$ insiemi convessi in $\mathbb{R}^d$, tutti chiusi o tutti aperti. Se $\bigcup\mathcal{F}$ è stellata, allora $\bigcap\mathcal{F} \neq \emptyset$.*
(Dimostrato. Si veda il file *Teorema di Helly*, Teorema 0.13.)

22/04/2013 [2 ore: 25,26]

- **Corollario** (Breen). *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi convessi in $\mathbb{R}^d$ tale che ogni sua sottofamiglia di cardinalità $\leq d+1$ abbia unione stellata. Supponiamo che valga almeno una delle seguenti:*
(a) *$\mathcal{F}$ è finita ed i suoi elementi sono tutti chiusi o tutti aperti;*
(b) *gli elementi di $\mathcal{F}$ sono chiusi, almeno uno di essi compatto.*
Allora $\bigcap\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Esempi di funzioni convesse

- *Funzione indicatrice.* Ad ogni insieme $A \subset X$ possiamo associare la funzione $\delta_A\colon X \to (-\infty, +\infty]$, data da
$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A, \\ +\infty & \text{se } x \in X \setminus A. \end{cases}$$
È facile vedere che:
– (per X s.v.) δ_A è convessa $\Leftrightarrow$ A è convesso;
– (per X normato o s.v.t.) δ_A è l.s.c. $\Leftrightarrow$ A è chiuso.

- *Funzioni sublineari.* Per X s.v., una funzione $p\colon X \to \mathbb{R}$ è sublineare se è positivamente omogenea e subadditiva, cioè,
$$\forall\, t \geq 0\ \forall\, x, y \in X: \quad p(tx) = tp(x),\ p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$
Sono sublineari:

– le funzioni convesse positivamente omogenee;
– le norme;
– $p = |\varphi|$ dove $\varphi \in X^\sharp$;
– $p = \sup_{\alpha \in I} p_\alpha$ (se dappertutto $p < +\infty$) dove le p_α sono sublineari;
– $p = \sum_1^n p_i$ dove le p_i sono sublineari.

Se X è normato e $p\colon X \to \mathbb{R}$ è sublineare, alora sono equivalenti:
(i) $p \leq M$ su $\overline{B}_r(x)$;
(ii) p è $\frac{M}{r}$-lipschitziana.

- *Funzione di distanza.* Sia $\emptyset \neq A \subset X$ dove (X, ρ) è uno spazio metrico. Definiamo $d_A\colon X \to \mathbb{R}$ con

$$d_A(x) = \mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}\,.$$

(a) $d_A = d_{\overline{A}}$.
(b) d_A è 1-lipschitziana.
(c) Siano X normato e A chiuso.
  (c1) d_A è convessa su $X \Leftrightarrow A$ è convesso.
  (c2) $C := X \setminus A$ è convesso $\Rightarrow d_A$ è concava su C.

- *Funzioni di supporto.* Siano X uno spazio normato, $\emptyset \neq A \subset X^*$, $\emptyset \neq B \subset X$. Definiamo $s_A\colon X \to (-\infty, +\infty]$ e $\sigma_B\colon X^* \to (-\infty, +\infty]$ con

$$s_A(x) = \sup_{a^* \in A} a^*(x) = \sup \hat{x}(A),$$
$$\sigma_B(x^*) = \sup_{b \in B} x^*(b) = \sup x^*(B).$$

(a) s_A è convessa, l.s.c., positivamente omogenea (e quindi sublineare, se a valori finiti).
(b) σ_B è convessa, w^*-l.s.c., positivamente omogenea (e quindi sublineare, se a valori finiti).
(c) Per X Banach si ottiene (usando il Principio di Uniforme Limitatezza):

$$s_A < +\infty \;\Leftrightarrow\; s_A < +\infty \text{ ed è continua } \;\Leftrightarrow\; A \text{ limitato.}$$

(d) Per X normato si ottiene (usando il Principio di Uniforme Limitatezza):

$$\sigma_B < +\infty \;\Leftrightarrow\; \sigma_B < +\infty \text{ ed è continua } \;\Leftrightarrow\; B \text{ limitato.}$$

Esercizio*. Quando s_A è w-continua? Quando σ_B è w^*-continua?

29/04/2013 [2 ore: 27,28]

Funzionale di Minkowski

- In quanto segue, X è uno spazio normato, $B_X = \overline{B}_1(0)$, e $C \subset X$ è un insieme convesso con $0 \in C$. Il *funzionale di Minkowski* (in inglese "Minkowski gauge") di C è dato da
$$p_C(x) = \inf\{t > 0 : x \in tC\} \qquad (x \in X).$$

- $p_C \colon X \to [0, +\infty]$, $p_C(0) = 0$.

- $p_{B_X} = \|\cdot\|$.

- Per $x \in X \setminus \{0\}$:
  (a) $p_C(x) = +\infty \Leftrightarrow [0, +\infty)x \cap C = \{0\}$;
  (b) $p_C(x) = 0 \Leftrightarrow [0, +\infty)x \subset C$.

  Corollario: $p_C < +\infty \Leftrightarrow 0 \in \text{a-int}\, C$.

- $C \subset D \Rightarrow p_C \geq p_D$.

- $\alpha > 0 \Rightarrow p_{\alpha C} = \frac{1}{\alpha} p_C$.

- p_C è sublineare (e quindi convesso).

- Sono equivalenti:
  (i) $p_C < +\infty$ ed è continuo;
  (ii) $p_C < +\infty$ ed è lipschitziano;
  (iii) $0 \in \text{int}\, C$;
  (iv) $\exists \alpha > 0$: $p_C \leq \alpha \|\cdot\|$.

- $\text{int}\, C \subset \text{a-int}\, C \subset \{p_C < 1\} \subset C \subset \{p_C \leq 1\} \subset \overline{C}$.

- $\big[\, \exists \alpha > 0 \colon p_C \geq \alpha \|\cdot\| \,\big] \;\Leftrightarrow\; C$ è limitato.

- **Proposizione.** *Siano X uno spazio normato, $C, D \subset X$ insiemi convessi limitati, entrambi chiusi o entrambi aperti, $c_0 \in C$, $d_0 \in D$. Allora esiste un omeomorfismo suriettivo $\Phi\colon X \to X$ tale che*
$$\Phi(C) = D\,, \quad \Phi(c_0) = d_0\,.$$
Si osservi che ciò implica che, dati un convesso limitato $C \subset X$, chiuso o aperto, e due punti $c_0, d_0 \in \operatorname{int} C$, allora esiste un omeomorfismo di C, estendibile ad un omeomorfismo di X, che trasformi c_0 in d_0.

  (Idea della dimostrazione. Con traslazioni, il problema si riduce al caso in cui $c_0 = 0 = d_0$. Per tale caso, Φ si costruisce in modo che $p_D(\Phi(x)) = p_C(x)$. Per la dimostrazione, si veda il file *Mappe affini, funzioni convesse*, Teorema 0.21.)

Minimizzazione di funzioni convesse

- *Due idee base.* Sia X uno spazio normato.
  (I) *Una funzione convessa $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ è l.s.c. se e solo se è w-l.s.c.*
  (II) *In uno spazio di Banach riflessivo, le bolle chiuse sono w-compatte. (E in X^*, le bolle chiuse sono w^*-compatte.)*

- **Esercizio.** Sia $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa l.s.c. Dimostrare che, per ogni segmento $[a, b] \subset \operatorname{dom}(f) \equiv \{f < +\infty\}$, la restrizione $f|_{[a,b]}$ è continua.

03/05/2013 [2 ore: 29,30]

- Gli argomenti di oggi sono parzialmente contenuti nel file *Minimizzazione di funzioni convesse.*

- Sia X uno spazio normato. Una funzione $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ viene detta *coercitiva* se
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$
(Questa nozione, come anche il seguente "Teoremino", può essere generalizzata in modo naturale per spazi metrici.)

- **Teoremino generale.**
Siano X uno spazio normato, $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ una funzione coercitiva, τ una topologia (non necessariamente vettoriale) su X. Supponiamo che f sia τ-l.s.c. e che le bolle chiuse di X siano τ-compatte. Allora f assume il suo minimo assoluto.

- **Corollario.**
Siano X uno spazio di Banach riflessivo, $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, propria, l.s.c., coercitiva. Allora f assume il suo minimo su X.

  Come applicazioni di questi semplici teoremi studieremo i *punti più vicini* ed i *centri di Chebyshev e simili.*

<u>*I punti più vicini*</u>

- Siano X uno spazio metrico e $A \subset X$ un insieme non vuoto. Per ogni $x \in X$ definiamo la sua *proiezione metrica* su A come l'insieme (possibilmente vuoto)
$$P_A(x) = \{a \in A : d(x, a) = d_A(x)\}$$
(dove d_A è la funzione distanza). Inoltre, diciamo che l'insieme A è:
  - *prossiminale* se $P_A(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$;
  - un insieme *di unicità* se $\operatorname{card} P_A(x) \leq 1$ per ogni $x \in X$;
  - un insieme *di Chebyshev* se $\operatorname{card} P_A(x) = 1$ per ogni $x \in X$ (in altre parole, se A è prossiminale e di unicità).

  Si osservi che *ogni insieme prossiminale è necessariamente chiuso.*

- **Corollario** (del "teoremino generale"). *Siano X uno spazio normato e $\emptyset \neq F \subset X$ un insieme chiuso. Se vale almeno una delle seguenti condizioni, F è prossiminale.*
  (a) *X è duale e F è w^*-chiuso.*
  (b) *X è riflessivo e F è w-chiuso.*
  (c) *X è riflessivo e F è convesso.*
  (d) *F è finito-dimensionale.*

- **Teorema.** *Per uno spazio di Banach X, le seguenti sono equivalenti:*
  (a) *X è riflessivo;*
  (b) *ogni convesso chiuso $\emptyset \neq C \subset X$ è prossiminale;*
  (c) *ogni iperpiano chiuso $H \subset X$ è prossiminale.*

- *Esercizio*.* Dimostrare che per uno spazio normato X, le seguenti sono equivalenti:
  (i) $\dim X < \infty$;

(ii) ogni sottoinsieme chiuso $\emptyset \neq F \subset X$ è prossiminale.

- **Teorema.** *Per uno spazio normato X, le seguenti sono equivalenti:*
  (a) *X è strettamente convesso (cioè, $S_X := \partial B_X$ non contiene segmenti non degeneri);*
  (b) *ogni convesso $\emptyset \neq C \subset X$ è di unicità;*
  (c) *ogni retta $L \subset X$ è di unicità (e quindi di Chebyshev: v. (d) sopra);*
  (d) *ogni iperpiano chiuso $H \subset X$ è di unicità.*

- **Corollario.** *Per uno spazio di Banach X, le seguenti sono equivalenti:*
  (a) *X è riflessivo e strettamente convesso;*
  (b) *ogni convesso chiuso $\emptyset \neq C \subset X$ è di Chebyshev;*
  (c) *ogni iperpiano chiuso $H \subset X$ è di Chebyshev.*

- *Commenti.*
  1. Dall'ultimo corollario segue il noto fatto che *ogni convesso chiuso ($\neq \emptyset$) in uno spazio di Hilbert è di Chebyshev.* Con ciò è collegato il seguente famoso **problema aperto**:

     Sia A un insieme di Chebyshev in uno spazio di Hilbert H; è A necessariamente convesso?

     È noto che la risposta è "SI" se H è finito-dimensionale o se A è w-chiuso; e che la risposta è "NO" per lo spazio incompleto a prodotto interno $H = (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ (dove c_{00} è lo spazio delle successioni a supporto finito). Ma il caso generale è aperto da decenni...
  2. Gli spazi $L_p(\mu)$ (e quindi, ad esempio, $L_p[0,1]$ e ℓ_p) con $1 < p < +\infty$ sono strettamente convessi e riflessivi.
  3. Se X è uno spazio normato con X^* separabile, esiste una norma equivalente su X nella quale X sia strettamente convesso. (Idea: sia $\{\varphi_n\} \subset S_{X^*}$ densa; allora l'operatore lineare $T\colon X \to \ell_2$, dato da $Tx = \big(2^{-n}\varphi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, è continuo e iniettivo; da ciò segue che $|||x||| := \|x\| + \|Tx\|_2$ è una norma equivalente strettamente convessa.)

     Di conseguenza, *ogni spazio riflessivo separabile può essere equivalentemente rinormato in modo che ogni convesso chiuso ($\neq \emptyset$) di X sia di Chebyshev.*

- *Introduzione informale al problema dei "centri".*

06/05/2013 [2 ore: 31,32]

- Siano X uno spazio normato, $\emptyset \neq A \subset X$.
  Se A è limitato, consideriamo la funzione
  $$f_\infty(x) = \sup_{a \in A} \|x - a\| \,;$$
  i suoi (eventuali) minimizzanti vengono chiamati *centri di Chebyshev* di A.
  Se $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, consideriamo le funzioni
  $$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x - a_n\| \,, \qquad f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x - a_n\|^2 \,.$$
  Gli eventuali minimizzanti di f_1 vengono chiamati *mediane* di A. Gli eventuali minimizzanti di f_2 sono detti *mediane quadratiche* di A.

- **Teorema.** *In uno spazio di Banach duale (tra i quali ci sono tutti gli spazi riflessivi), ogni insieme limitato ammette almeno un centro di Chebyshev, e ogni insieme finito ammette almeno una mediana e almeno una mediana quadratica.*

- **Esercizio.**
  (a) Siano X, Y spazi normati, $A \subset X$. Supponiamo che esistano un'isometria (non necessariamente suriettiva) $i\colon X \to Y$ e una proiezione 1-lipschitziana $P\colon Y \to i(X)$. Se $i(A)$ ammette centro di Chebyshev [mediana, mediana quadratica] in Y, allora A ammette centro di Chebyshev [mediana, mediana quadratica] in X.
  (b) Dedurre da (a) che: se esiste una proiezione 1-lipschitziana $P\colon X^{**} \to X$ allora, nello spazio X, ogni insieme limitato ammette almeno un centro di Chebyshev, e ogni insieme finito ammette almeno una mediana e almeno una mediana quadratica.
  (c) Mostrare che le ipotesi in (b) sono soddisfatte per ogni spazio duale X.

- **Curiosità.**
  (i) Ciascuno degli spazi $C[0,1]$ e c_0 contiene un sottospazio chiuso X di codimensione 1 tale che un sottoinsieme di 3 punti di X non ammette centri di Chebyshev in X.
  (ii) Su ogni spazio di Banach non riflessivo esiste una norma equivalente nella quale un insieme di 3 punti non ammetta centri di Chebyshev. E lo stesso vale per le mediane e per le mediane quadratiche.

Disuguaglianza integrale di Jensen

(per dettagli si veda il file corrispondente)

In quanto segue $C \subset \mathbb{R}^d$ è un insieme convesso non vuoto.

- Disuguaglianza finita di Jensen come un caso particolare di disuguaglianza integrale.
- La σ-algebra $\mathcal{B}(C)$ dei boreliani relativi di C, e l'insieme $\mathcal{M}_1(C)$ delle misure probabilistiche su $\mathcal{B}(C)$. Definizione del baricentro x_μ di una $\mu \in \mathcal{M}_1(C)$.
  Se μ è concentrata su un insieme limitato, allora x_μ esiste.
- *Proposizione.* Se x_μ esiste (in $\mathbb{R}^d$) allora appartiene a C.

  Corollario. Una "combinazione convessa infinita" di punti di un insieme convesso finito-dimensionale (in uno s.v.t. di Hausdorff) rimane nell'insieme.
- *Osservazioni algebriche.* Se X è uno s.v., possiamo identificare
  $$(X \times \mathbb{R})^\sharp = X^\sharp \times \mathbb{R},$$
  nel senso che vi è una corrispondenza biunivoca lineare tra i funzionali $\Lambda \in (X \times \mathbb{R})^\sharp$ e le coppie $(\ell, \beta) \in X^\sharp \times \mathbb{R}$, data da
  $$\Lambda(x, t) = \ell(x) + \beta t.$$
  In tale corrispondenza (se X è uno s.v.t.), $(X \times \mathbb{R})^* = X^* \times \mathbb{R}$.

10/05/2013 [2 ore: 33,34]

- *Osservazioni algebriche – bis.* Sia $\Lambda \in (X \times \mathbb{R})^\sharp$ tale che separi due punti (x_0, t) e (x_0, s) con $t \neq s$. Allora ogni insieme di livello $\Lambda^{-1}(\alpha)$ coincide con il grafico di una funzione affine $a\colon X \to \mathbb{R}$. Inoltre, se $\Lambda \in (X \times \mathbb{R})^*$ allora a è continua.
- Per il resto di questa lezione, si veda il file *Disuguaglianza integrale di Jensen*: Lemma 0.4, Theorem 0.5, Corollary 0.6, "Image of a probability measure", Theorem 0.7, Corollary 0.8, "Possible generalizations".

13/05/2013 [2 ore: 35,36]

Funzioni convesse di una variabile reale

- Si veda il file *Convex functions of one real variable*: dall'inizio fino al Theorem 0.10 (nella Proposition 0.5 solo il punto (a)).

- **Esercizio.** Dimostrare che, dato un insieme numerabile $E \subset \mathbb{R}$, esiste una funzione convessa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che f sia derivabile esattamente nei punti di $\mathbb{R} \setminus E$.
  (Suggerimento: considerate un'opportuna serie di multipli di traslati di $|\cdot|$.)

17/05/2013 [2 ore: 37,38]

- Completamento della dimostrazione del Theorem 0.10.

- Definition 0.12, Theorem 0.13.

Differenziabilità

(Si veda il file *Differenziabilità di funzioni convesse, il subdifferenziale.*)

- *Differenziabilità secondo Gâteaux e secondo Fréchet.*
  Siano X, Y spazi normati, $A \subset X$ un insieme aperto, $a \in A$, $F\colon A \to Y$. Diciamo che l'applicazione F è:
  (i) *Gâteaux-differenziabile* (G-differenziabile) in a se per ogni $v \in X$ esiste la derivata direzionale
  $$F'(a, v) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t}$$
  e l'operatore $T := F'(a, \cdot)\colon X \to Y$ è lineare e continuo.
  Ciò equivale a dire che esiste un operatore lineare continuo $T\colon X \to Y$ tale che, per ogni $v \in X$ con $\|v\| = 1$, si abbia
  $$F(a + tv) = F(a) + tTv + o(t) \quad \text{per } t \to 0.$$

(ii) *Fréchet-differenziabile* (F-differenziabile) in a se esiste un operatore lineare continuo $T\colon X \to Y$ tale che

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Th}{\|h\|} = 0\,,$$

cioè,

$$F(a+h) = F(a) + Th + o(\|h\|) \quad \text{per } \|h\| \to 0.$$

In entrambi i casi, l'opartore T viene chiamato la *derivata* (o il differenziale) di Gâteaux/Fréchet di F in a, e viene denotato con $F'(a)$. Di conseguenza, $F'(a)\colon X \to Y$ e $F'(a)v = F'(a, v)$ per ogni $v \in X$.

Si noti che, per una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, la derivata di Gâteaux/Fréchet di f in a è un elemento di X^*.

- Siano X, Y, A, F, a come sopra. Se $X = \mathbb{R}^d$ e F è lipschitziana in un intorno di a, allora la G-derivabilità e la F-derivabilità di F in a sono equivalenti.

  In particolare, per una funzione convessa f su un aperto convesso $A \subset \mathbb{R}^d$, la G- e la F-diffrenziabilità coincidono.

- Proposition 0.5 (su funzioni sublineari).

- In quanto segue, X è uno spazio normato, $A \subset X$ un aperto convesso, $a \in A$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua convessa.
  (a) $f'_+(a, v)$ *esiste finita per ogni* $v \in X$.
  (b) $f'_+(a, \cdot)$ *è sublineare e continua.*
  (c) *Le seguenti sono equivalenti:*
    (c1) f *è G-differenziabile in* a*;*
    (c2) $f'(a, v)$ *esiste per ogni* $v \in X$*;*
    (c3) $f'(a, v)$ *esiste per ogni* $v \in B$ *dove* $B \subset X$ *è un insieme tale che* $\overline{\operatorname{span}}\, B = X$.

- **Corollario** ("Calculus Student's Delight")**.** *Sia* $X = \mathbb{R}^d$. *Allora le seguenti sono equivalenti:*
  (i) f *è F-differenziabile in* a*;*
  (ii) f *è G-differenziabile in* a*;*
  (iii) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ *esiste per ogni* $i = 1, \ldots, d$.
  Ciò non è vero in generale, cioè per funzioni non convesse.

27/05/2013 [2 ore: 39,40]

- *Esempio.* La norma di ℓ_1 è G-differenziabile in $a \in \ell_1$ se e solo se tutte le coordinate di a sono non nulle; dall'altra parte, essa non è F-differenziabile in alcun punto.

Subdifferenziale

(Si veda sempre lo stesso file.)

- Definizione: $\partial f(a) = \{x^* \in X^* :\ f(x) \geq f(a) + x^*(x-a)\ \forall x \in A\}$.

- **Lemma.** *Sia f una funzione continua convessa su un aperto convesso A (in uno spazio normato X), e siano $a \in A$, $v \in X$, $m \in \mathbb{R}$ tali che $-f'_+(a,-v) \leq m \leq f'(a,v)$. Allora esiste $x^* \in \partial f(a)$ tale che $x^*(v) = m$.* (Si ricordi che $-f'_+(a,-v) = f'_-(a,v)$.)
  (Idea: usare il teorema di Hahn-Banach in $X^* \times \mathbb{R}$ per separare $C :=$ epi(f) e la retta $D := \{(a+tv, f(a)+mt) : t \in \mathbb{R}\}$.)

- **Proprietà del subdifferenziale.**
  (i) Sia $r > 0$ tale che $B_r^0(a) \subset A$. Allora
  $\partial f(a) = \{x^* \in X^* :\ f(x) \geq f(a) + x^*(x-a)\ \forall x \in B_r^0(a)\}$.
  In altre parole, $\partial f(a)$ è una nozione locale: dipende solo dai valori di f in un intorno di a.
  (ii) $\partial f(a) \neq \emptyset$.
  (iii) f è L-lipschitziana su A $\Leftrightarrow$ $\partial f(A) \subset \overline{B}_L(0)$.
  (iv) ∂f è localmente limitato.
  (v) $\partial f(a)$ è convesso w^*-compatto.
  (vi) $\partial f(a) = \{x^* \in X^* :\ x^*(v) \leq f'_+(a,v)\ \forall v \in X\}$.
  (vii) $f'_+(a,v) = \max\{x^*(v) : x^* \in \partial f(a)\}$, e quindi anche
  $f'_-(a,v) = -f'_+(a,-v) = \min\{x^*(v) : x^* \in \partial f(a)\}$.
  (viii) ∂f è un *operatore monotono* (da A in 2^{X^*}, le parti di X^*):
  $\forall x,y \in A\ \forall x^* \in \partial f(x)\ \forall y^* \in \partial f(y) :\quad (x^*-y^*)(x-y) \geq 0\,.$

31/05/2013 [4 ore: 41–44]

- f è G-differenziabile in a $\Leftrightarrow$ card$[\partial f(a)] = 1$.

- **Teorema.** *Siano A un insieme aperto convesso in uno spazio normato X, e $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua convessa. Allora il subdifferenziale $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ è (un'applicazione multivoca) $\|\cdot\|$-w^*-u.s.c., cioè, per ogni $a \in A$,*

  $$\forall W \subset X^* \ w^*\text{-aperto con } \partial f(a) \subset W \quad \exists r > 0 : \quad \partial f(B_r^0(a)) \subset W\,.$$

  Idea della dimostrazione. Procedendo per assurdo, si deduce che esistono un w^*-aperto $W \supset \partial f(a)$ e successioni $\{x_n\} \subset A$ e $\{x_n^*\} \subset X^*$ tali che $x_n \to a$ e $x_n^* \in \partial f(x_n) \setminus W$. Grazie alla locale limitatezza del subdifferenziale, $\{x_n^*\}$ è limitata, e quindi ammette una subnet $(x_{n_\alpha}^*)$ che w^*-converge a qualche $x_0^* \in X^*$. Necessariamente, $x_0^* \notin W$. Dall'altra parte, passando al limite nelle disuguaglianze

  $$f(y) \geq f(x_{n_\alpha}) + x_{n_\alpha}^*(y - x_{n_\alpha}) \qquad (y \in A),$$

  si ottiene che $x_0^* \in \partial f(a) \subset W$, una contraddizione. *[q.e.d.]*

- **Corollario.** *Se f è G-differenzibile in a con $f'(a) = x_0^*$, $A \ni x_n \to a$ e $x_n^* \in \partial f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, allora $x_n^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.*

- **Teorema.** *Siano X, A, f, a come sopra. Allora sono equivalenti:*
  (i) *f è F-differenziabile in a;*
  (ii) *$\partial f(a) = \{x_0^*\}$ e, se $A \ni x_n \to a$ e $x_n^* \in \partial f(x_n)$ allora $x_n^* \to x_0^*$ (in norma);*
  (iii) $\operatorname{osc}(\partial f, a) := \lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam}[\partial f(B_\delta^0(a))] = 0$.

- **Corollario.** *Sono equivalenti:*
  (i) *f è F-differenziabile in A;*
  (ii) *f è G-differenziabile in A con $f'\colon A \to X^*$ continua;*
  (iii) *$f \in C^1(A)$.*

- **Corollario.** *Sia $X = \mathbb{R}^d$. Se, in ogni punto di a, esistono tutte le derivate parziali di f, allora $f \in C^1(A)$.*

- **Differenziabilità di funzioni convesse continue a meno di insiemi piccoli** – si veda il relativo file.

Alcuni complementi non dimostrati a lezione

- *Spazi di Asplund e spazi weak-Asplund.* Uno spazio di Banach X è detto di Asplund [weak-Asplund] se ogni funzione convessa continua, definita su un aperto convesso $A \subset X$, è F-differenziabile [G-differenziabile] su A a meno di un insieme di I categoria di Baire.

- *Per uno spazio di Banach X, le seguenti sono equivalenti.*
  (i) *X è Asplund.*
  (ii) *Per ogni sottospazio separabile $Y \subset X$, il duale Y^* è separabile.*
  (iii) *Ogni insieme limitato $\emptyset \neq E \subset X^*$ ammette degli slice di diametro arbitrariamente piccolo,* dove uno slice di E è un'intersezione non vuota di E con un semispazio aperto ("slice" vuol dire "fetta" in inglese).
  (iv) *Il teorema di Radon–Nikodým vale per misure a valori in X^*,* cioè, se Σ è una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω e $\nu\colon \Sigma \to X^*$ e $\mu\colon \Sigma \to [0, +\infty)$ sono misure tali che ν sia assolutamente continua rispetto a μ, allora esiste una funzione $f\colon \Omega \to X^*$ μ-integrabile (nel senso di Bochner) tale che ν sia della forma $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ $(E \in \Sigma)$.

- *Se X ammette una norma equivalente che sia G-differenziabile [F-differenziabile] su $X \setminus \{0\}$, allora X è weak-Asplund [Asplund].*

- **Teorema** (calcolo subdifferenziabile)**.** *Siano X uno spazio normato, $A \subset X$ un aperto convesso, $a \in A$. Tutte le funzioni figuranti nei seguenti punti siano convesse continue.*
  (a) *$\partial(f + g)(a) = \partial f(a) + \partial g(a)$.*
  (b) *Se $h = \max\{f_1, \dots, f_n\}$, allora $\partial h(a) = \operatorname{conv}[\bigcup_{i \in I(a)} \partial f_i(a)]$ dove $I(a) = \{i : f_i(a) = h(a)\}$.*
  (c) *Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto, $f\colon A \to I$ è continua convessa e $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ è convessa non decrescente, allora $h := \varphi \circ f$ è continua e convessa A e si ha la formula $\partial h(a) = \partial\varphi(f(a)) \cdot \partial f(a)$.*

— FINE DEL CORSO —