Teorema di Hahn-Banach per funzionali maggiorati da funzioni convesse (L.V.)

Teorema 1. *Siano X uno spazio v. t. localmente convesso (per es. uno spazio normato), $C \subset X$ un insieme convesso con $0 \in \operatorname{int} C$, $f\colon C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa su C continua in 0. Inoltre, siano $L \subset X$ un sottospazio lineare, $u^* \in L^*$ tale che $u^* \leq f$ su $L \cap C$. Allora esiste $x^* \in X^*$ tale che $x^* = u^*$ su L e $x^* \leq f$ su C.*

Dimostrazione. Denotiamo

$$E = \operatorname{epi}(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} :\ x \in C,\ f(x) \leq t\}$$
$$F = \operatorname{gr}(u^*) = \{(y, u^*(y)) \in X \times \mathbb{R} :\ y \in L\}.$$

Allora E, D sono convessi, $\operatorname{int} E \neq \emptyset$ (contiene per es. il punto $(0, f(0)+1)$) e $D \cap \operatorname{int} E = \emptyset$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale non nullo $\Phi \in (X \times \mathbb{R})^*$ tale che

$$\sup \Phi(E) \leq \inf \Phi(D).$$

Considerando il (noto e facile) fatto che Φ può essere rappresentato come una coppia $(z^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$, ne deduciamo che

$$z^*(x) + \alpha f(x) \leq z^*(y) + \alpha u^*(y) \quad \forall\, x \in C,\ y \in L. \tag{1}$$

Consideriamo tre casi.

a) Caso $\alpha = 0$. In questo caso la (1) implica (ponendo $y = 0$)

$$z^*(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in C.$$

Ne segue $z^* = 0$, una contraddizione (sarebbe $\Phi = 0$).

b) Caso $\alpha > 0$. Possiamo supporre $\alpha = 1$ (altrimenti sostituiamo Φ con un suo opportuno multiplo positivo). Quindi

$$z^*(x) + f(x) \leq z^*(y) + u^*(y) \quad \forall\, x \in C,\ y \in L. \tag{2}$$

Ponendo $x = y \in C \cap L$, si ottiene $f(y) \leq u^*(y)$, per cui $f = u^*$ su $C \cap L$; in particolare $f(0) = 0$. Ponendo $x = 0$ in (2), si ha $(z^* + u^*)(y) \geq 0$ per ogni $y \in L$, da cui $(-z^*) = u^*$ su L. La funzione $g(x) = z^*(x) + f(x)$ è convessa su C e soddisfa $g(0) = 0$ e $g(x) \leq 0$ su C (ponendo $y = 0$). Ne segue che $g(x) = 0$ su C. Ricapitolando, si ha $(-z^*) = u^*$ su L e $(-z^*) = f$ su C, per cui possiamo porre $x^* = -z^*$.

c) Caso $\alpha < 0$. Possiamo supporre $\alpha = -1$. Allora

$$z^*(x) - f(x) \leq z^*(y) - u^*(y) \quad \forall\, x \in C,\ y \in L. \tag{3}$$

Ponendo $x = 0$, ne segue che

$$z^* - u^* \geq -f(0) \quad \text{su } L,$$

per cui $z^* = u^*$ su L. Inoltre, ponendo $y = 0$ nella (3), otteniamo $z^* \leq f$ su C. Possiamo porre $x^* = z^*$. $\square$

Commento 2. La stessa dimostrazione funziona alche nel caso algebrico, cioè quando X è uno spazio vettoriale, $0 \in \operatorname{a-int} C$, senza ipotesi di continuità per f e/o per i funzionali linari coinvolti.

Corollario 3 (Riformulazione del teorema)**.** *Siano X uno s. v. t. localmente convesso, $C \subset X$ un convesso, $x_0 \in \operatorname{int} C$, $f \colon C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa continua in x_0, $M \subset X$ un insieme affine contenente x_0, $a \colon M \to \mathbb{R}$ una funzione affine continua tale che $a \leq f$ su $M \cap C$. Allora la funzione a ammette un'estensione affine continua $A \colon X \to \mathbb{R}$ tale che $A \leq f$ su C.*

Corollario 4. *Siano C un insieme convesso aperto in uno spazio normato (o uno s.v.t. localmente convesso), $f \colon C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora, per ogni $x \in C$, il subdifferenziale*

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \; f(y) \geq f(x) + x^*(y - x) \; \forall \, y \in C\}$$

è non vuoto.