Due teoremi simili al teorema di Helly (L.V.)

Ricordiamo che una versione del teorema di Helly dice: ogni famigia $(d+1)$-centrata di insiemi compatti convessi in $\mathbb{R}^d$ ha intersezione non vuota. Il seguente caso particolare di un teorema di Horn riguarda famiglie d-centrate.

Teorema 1. *Se $\mathcal{C}$ è una famiglia d-centrata di compatti convessi in $\mathbb{R}^d$, allora per ogni punto $x \in \mathbb{R}^d$ esiste una retta passante per x che interseca ogni elemento di $\mathcal{C}$.*

Questa è la versione generale del teorema di Horn:

Teorema 2 (Horn, 1949)**.** *Sia $1 \le k \le d$. Se $\mathcal{C}$ è una famiglia k-centrata di compatti convessi in $\mathbb{R}^d$, allora per ogni insieme affine A_0 di dimensione $d-k$ esiste un insieme affine A di dimensione $d-k+1$ tale che $A_0 \subset A$ e A interseca tutti gli elementi di $\mathcal{C}$.*

Il seguente è un teorema che non dipende dalla dimensione dello spazio.

Teorema 3 (Berge)**.** *Sia X uno spazio v. t. di dimensione finita. Siano $C_1, \ldots, C_n$ insiemi convessi chiusi in X tali che anche l'unione $\bigcup_{i=1}^n C_i$ sia convessa. Se la famiglia $\{C_1, \ldots, C_n\}$ è $(n-1)$-centrata, allora $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$.*

Corollario 4. *Siano $C_0, C_1, \ldots, C_n$ insiemi convessi chiusi in uno spazio finito dimensionale. Supponiamo che*

a) $\bigcap\{C_i : \ 0 \le i \le n,\ i \neq k\} \neq \emptyset$ *per ogni* $1 \le k \le n$, *ma*

b) $\bigcap_{i=0}^n C_i = \emptyset$.

Allora C_0 non è contenuto nell'unione $\bigcup_{i=1}^n C_i$.

Dimostrazione. Denotiamo $A_i = C_0 \cap C_i$ $(1 \le i \le n)$. Se fosse $C_0 \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$, l'unione $\bigcup_{i=1}^n A_i = C_0$ sarebbe convessa. Applicare il teorema di Berge. $\square$