Un teorema astratto su punti più vicini (L.V.)

Ricordiamo che un sottoinsieme A di uno spazio metrico si dice *prossiminale* se ogni punto dello spazio ammette almeno una migliore approssimazione in A. L'insieme A è un *insieme di Chebyshev* se ogni punto dello spazio ammette una e una sola migliore approssimazione in A.

Teorema 1. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Supponiamo che τ sia una topologia su X tale che l'intersezione di A con ogni bolla chiusa di X sia τ-compatta. Allora A è prossiminale.*
Inoltre, se A è anche di Chebyshev, allora la proiezione metrica $P_A \colon X \to A$ è (d-τ)-continua.

Dimostrazione. Si ha $P_A(x) = A \cap B\big(x, d_A(x)\big) = A \cap \bigcap_{\varepsilon>0} B\big(x, d_A(x) + \varepsilon\big)$. Ciò implica la prima parte del teorema (perché gli insiemi nell'intersezione sono τ-compatti e "inscatolati").

Supponiamo ora che A (che soddisfa l'ipotesi di compattezza) sia anche un insieme di Chebyshev. Se P_A non è (d-τ)-continua, esiste una successione convergente $x_n \xrightarrow{d} x_0$ tale che $P_A(x_n)$ non converge a $P_A(x_0)$ nella topologia τ. Passando eventualmente ad un'opportuna sottosuccesione, possiamo supporre che esista un τ-aperto U tale che $P_A(x_0) \in U$ ma $P_A(x_n) \notin U$ per ogni n. Poiché

$$\begin{aligned} 0 \le d\big(P_A(x_n), x_0\big) &\le d\big(P_A(x_n), x_n\big) + d(x_n, x_0) \\ &= d_A(x_n) + d(x_n, x_0) \ \to d_A(x_0)\,, \end{aligned}$$

la successione $\big\{P_A(x_n)\big\}$ è limitata. Perciò, per un $r > 0$ sufficientemente grande, $P_A(x_n)$ appartiene al τ-compatto $A \cap B(x_0, r)$. Esiste quindi una subnet $\{x_\alpha\}$ della successione $\{x_n\}$ tale che

$$P_A(x_\alpha) \xrightarrow{\tau} y \in A \cap B(x_0, r).$$

Ovviamente $y \notin U$. Inoltre, come abbiamo visto sopra,

$$d\big(P_A(x_\alpha), x_0\big) \le d_A(x_\alpha) + d(x_\alpha, x_0) \ \to d_A(x_0)\,,$$

per cui, per ogni $\varepsilon > 0$, abbiamo $P_A(x_\alpha) \in A \cap B\big(x_0, d_A(x_0) + \varepsilon\big)$ per ogni α sufficientemente grande. Essendo $A \cap B\big(x_0, d_A(x_0) + \varepsilon\big)$ τ-chiuso per l'ipotesi, otteniamo

$$y \in \bigcap_{\varepsilon>0} \big[A \cap B\big(x_0, d_A(x_0) + \varepsilon\big)\big] = P_A(x_0) \subset U,$$

ma ciò è una contraddizione. $\square$

Corollario 2. *Siano X uno spazio di Banach, $A \subset X$ un insieme non vuoto. Supponiamo che sia soddisfatta* almeno una *delle seguenti condizioni:*

(a) *A è chiuso e finito dimensionale;*
(b) *A è w-compatto;*
(c) *X è riflessivo, A è convesso e chiuso;*
(d) *$X = Z^*$ (cioè X è duale), A è w^*-chiuso.*

Allora A è prossiminale.

Dimostrazione. Basta utilizzare il Teorema con $d(x, y) = \|x - y\|$ e $\tau = \| \cdot \|$ (caso (a)) oppure $\tau = w$ (casi (b),(c)) oppure $\tau = w^*$ (caso (d)). $\square$