ESERCIZI

In ciò che segue, X denota uno spazio vettoriale normato (reale).

1. Dimostrare che l'ivolucro convesso di un sottoinsieme finito di X è compatto.

2. Siano $C_1, \ldots, C_n \subset X$ insiemi convessi compatti. Mostrare:
a) $\operatorname{conv}[\bigcup_{i=1}^n C_i] = \{x = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i : \ c_j \in C_j, \ \lambda_j \geq 0, \ \sum_1^n \lambda_i = 1\}$;
b) $\operatorname{conv}[\bigcup_{i=1}^n C_i]$ è compatto.

3. Dimostrare che l'involucro convesso di un insieme aperto (in X) è aperto.

4. Trovare l'esempio di un insieme chiuso $F \subset \mathbf{R}^2$ tale che $\operatorname{conv} F$ non sia chiuso. Mostrare che tale esempio non può essere trovato in $\mathbf{R}$.

5. Siano $I_1, \ldots, I_n$ intervalli (non necessariamente chiusi e/o aperti e/o limitati) in $\mathbf{R}$ tali che

$$I_i \cap I_j \neq \emptyset \qquad \text{per ogni } i \neq j.$$

Dimostrare che esiste un punto $x \in \mathbf{R}$ appartenente a tutti gli n intervalli.

6. Consideriamo i seguenti quattro casi di $C \subset X$:
(a) $X = C[0,1]$, $C = \{x \in C[0,1] : 0 \leq \int_0^1 x(t)\,dt \leq 1\}$;
(b) $X = c_0$, $C = \{x = (x_n) \in c_0 : 0 \leq x_n \leq 1 \text{ per ogni } n\}$;
(c) $X = \ell_1$, $C = \{x = (x_n) \in \ell_1 : |x_n| \leq 1 \text{ per ogni } n\}$;
(d) $X = \ell_2$, $C = \{x = (x_n) \in \ell_2 : |x_n| \leq \frac{1}{n} \text{ per ogni } n\}$.

Per ognuno dei quattro casi, rispondete alle seguenti domande. L'insieme C è convesso?, è chiuso?, è limitato?, è compatto?, ha punti interni?