Funzionale di Minkowski

(L.V.)

Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio normato X tale che C sia limitato e $0 \in \operatorname{int} C$. Definiamo una funzione $p_C\colon X \to [0,+\infty)$, il *funzionale di Minkowski* con la formula

$$p_C(x) = \inf\{t > 0 : \tfrac{x}{t} \in C\}.$$

Dalle proprietà di C segue che, per $x \neq 0$, l'insieme di cui si fa l'estremo inferiore è, per un opportuno $\alpha > 0$, uno dei due intervalli

$$[\alpha, +\infty) \quad \text{oppure} \quad (\alpha, +\infty),$$

e quindi $p_C(x) = \alpha$. Perciò $p_C(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Nel seguente teorema enunciamo principali proprietà del funzionale di Minkowski. Iniziamo con una semplice osservazione.

Osservazione 1 (Esercizio)**.** *Siano a, b due numeri nonnegativi. Allora le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:*

(i) *$a \le b$;*
(ii) *per $t > 0$ vale l'implicazione $\big[b \le t \;\Rightarrow\; a \le t\big]$;*
(iii) *per $t > 0$ vale l'implicazione $\big[b < t \;\Rightarrow\; a \le t\big]$.*

Teorema 2. *Siano X uno spazio normato, $C \subset X$ un insieme convesso, $0 < \varrho < r$ tali che $\varrho B_X \subset C \subset rB_X$. Allora*

(a) *$\operatorname{int} C \subset \{x : p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x : p_C(x) \le 1\} \subset \overline{C}$;*
(b) *$\frac{1}{r}\|x\| \le p_C(x) \le \frac{1}{\varrho}\|x\| \;\forall\, x \in X$,*
(c) *$p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x) \;\forall\, \alpha \ge 0 \;\forall\, x \in X$;*
(d) *$p_C(x + y) \le p_C(x) + p_C(y) \;\forall\, x, y \in X$;*
(e) *p_C è $\frac{1}{\varrho}$-lipschitziano su X.*

Dimostrazione. (a) Se $x \in \operatorname{int} C$, esiste $t \in (0,1)$ (vicino a 1) tale che $\frac{x}{t} \in C$, per cui $p_C(x) \le t < 1$. Se $p_C(x) < 1$, per la proprietà dell'estremo inferiore esiste $t \in (0,1)$ con $\frac{x}{t} \in C$; ne segue $x = (1-t)\cdot 0 + t \cdot \frac{x}{t} \in C$. Se $x = \frac{x}{1} \in C$, allora $p_C(x) \le 1$. Se $p_C(x) \le 1$, allora (per definizione di “inf”) per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\frac{x}{1+(1/n)} \in C$, per cui $x = \lim \frac{x}{1+(1/n)} \in \overline{C}$.

(b) Dall'inclusione $\varrho B_X \subset C \subset rB_X$ segue che, per $t > 0$ e $x \in X$, valgono le implicazioni

$$\frac{1}{\varrho}\|x\| \le t \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x}{t}\right\| \le \varrho \;\Rightarrow\; \frac{x}{t} \in C \;\Rightarrow\; p_C(x) \le t$$

e

$$p_C(x) < t \;\Rightarrow\; \frac{x}{t} \in C \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x}{t}\right\| \le r \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\|x\| \le t.$$

Il resto di (a) segue dall'Osservazione.

(c) Se $\alpha > 0$ e $x \in X$, si ha (facendo una semplice sostituzione $\frac{t}{\alpha} = s$)

$$p_C(\alpha x) = \inf\{t > 0 : \frac{\alpha x}{t} \in C\} = \inf\{\alpha s > 0 : \frac{x}{s} \in C\} = \alpha p_C(x).$$

(d) Dimostriamo prima che p_C è convesso. Siano $x, y \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $t, s > 0$ tali che

$$p_C(x) < t < p_C(x) + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad p_C(y) < s < p_C(y) + \varepsilon.$$

Allora i punti $\frac{x}{t}$ e $\frac{y}{s}$ appartengono a C, per cui anche il punto

$$\frac{(1-\lambda)x + \lambda y}{(1-\lambda)t + \lambda s} = \frac{(1-\lambda)t}{(1-\lambda)t + \lambda s} \cdot \frac{x}{t} + \frac{\lambda s}{(1-\lambda)t + \lambda s} \cdot \frac{y}{s}$$

sta in C. Ciò implica

$$p_C\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)t + \lambda s \leq (1-\lambda)p_C(x) + \lambda p_C(y) + \varepsilon,$$

da cui la convessità ($\varepsilon > 0$ era arbitrario!).

Ora, la subadditività è immediata: $p_C(x+y) = p_C(2\,\frac{x+y}{2}) = 2p_C((1/2)x + (1/2)y) \leq 2[(1/2)p_C(x) + (1/2)p_C(y)] = p_C(x) + p_C(y)$.

(e) Da (d) segue $p_C(x) = p_C(x - y + y) \leq p_C(x-y) + p_C(y)$, da cui $p_C(x) - p_C(y) \leq p_C(x-y)$; e, in modo simile, $p_C(y) - p_C(x) \leq p_C(y-x)$. Allora, per (b),

$$\big|p_C(x) - p_C(y)\big| \leq \max\big\{p_C(x-y), p_C(y-x)\big\} \leq \frac{1}{\varrho}\|x - y\|.$$

$\square$

Corollario 3. *Sia $C \subset X$ un insieme convesso limitato con $0 \in \operatorname{int} C$. Allora $\operatorname{int} C = \{x : p_C(x) < 1\}$ e $\overline{C} = \{x : p_C(x) \leq 1\}$.* (Segue da (a) e dalla continuità di p_C.)

Proposizione 4. *Siano X uno spazio normato, $c, d \in X$, $C, D \subset X$ due insiemi convessi limitati tali che $c \in \operatorname{int} C$, $d \in \operatorname{int} D$. Supponiamo che C, D siano entrambi chiusi o entrambi aperti. Allora esiste un omeomorfismo Φ di C su D tale che $\Phi(c) = d$.*

Dimostrazione. Gli insiemi convessi $C_1 := C - c$ e $D_1 := D - d$ sono limitati (entrambi aperti o entrambi chiusi) con l'origine come punto interno, per cui esistono $0 < \varrho < r$ tali che

$$\varrho B_X \subset C_1 \subset r B_X \qquad \text{e} \qquad \varrho B_X \subset D_1 \subset r B_X.$$

Per semplicità denotiamo $\gamma = p_{C_1}$, $\delta = p_{D_1}$; sappiamo che queste funzioni sono continue su X. Definiamo una funzione $F \colon X \to X$ con

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}\, x & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Essendo $\frac{\varrho}{r} \leq \frac{\gamma(x)}{\delta(x)} \leq \frac{r}{\varrho}$ (Teorema 2(b)), ne segue che F è continua. È facile verificare che la funzione

$$G(y) = \begin{cases} \frac{\delta(y)}{\gamma(y)}\, y & \text{per } y \neq 0, \\ 0 & \text{per } y = 0, \end{cases}$$

è inversa della F, per cui F è un omeomorfismo di X su sé. Poiché $\delta\big(F(x)\big) = \gamma(x)$ per ogni x, dal Corollario 3 segue $F(C_1) = D_1$. Allora l'applicazione $\Phi\colon C \to D$, data da

$$\Phi(x) = F(x - c) + d\,,$$

è l'omeomorfismo richiesto. $\square$