Successioni generalizzate (nets) (L.V.)

Sia X uno spazio topologico. Ricordiamo che una successione $\{x_n\}$ in X è in realtà una funzione $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$ con $\varphi(n) = x_n$.

Nel caso di **spazi metrici** valgono le seguenti affermazioni.

- $A \subset X$ è chiuso se e solo se per ogni successione in A che converge in X, il suo limite appartiene ad A.
- $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se vale l'implicazione
$$x_n \to x \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(x).$$
- X è compatto se e solo se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente in X.

Queste proprietà non sono sempre soddisfatte in spazi topologici non metrizzabili (vedi la bibliografia sotto per i relativi controesempi). Ma esse rimangono valide se, al posto di successioni, consideriamo "successioni generalizzate": le nets.

Bibliografia

[AB] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide* (1999), Sezione 2.4.

[K] J. L. Kelley, *General Topology* (1957), Capitolo 2.

[M] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Sezione 2.1.

— — —

Definizione 1. Siano I un insieme non vuoto, "$\preceq$" una relazione binaria su I con le seguenti proprietà:

- "$\preceq$" è riflessiva ($\alpha \preceq \alpha\ \forall\, \alpha \in I$) e transitiva ($\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3$ implica $\alpha_1 \preceq \alpha_3$),
- $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in I\ \exists\, \alpha \in I\colon\ \alpha_i \preceq \alpha$ $(i = 1, 2)$ (cioè, ogni sottoinsieme di due elementi di I ha un maggiorante in I).

In tal caso diciamo che la coppia $(I, \preceq)$ è un *insieme diretto in su*, oppure, più brevemente, che I è un *insieme diretto*.

Si noti che, in un insieme diretto, ogni insieme finito ammette un maggiorante.

Definizione 2. Sia X uno spazio topologico.

(a) Una *net* (successione generalizzata) $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ in X è una funzione $\varphi\colon I \to X$, dove I è un insieme diretto e $\varphi(\alpha) = x_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$.

(b) Diciamo che una net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *converge* a un punto $x \in X$ se per ogni intorno U di x esiste $\alpha_0 \in I$ tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$.

Si osservi che una net non può avere due limiti distinti se lo spazio topologico è di Hausdorff.

Esempi 3. Sia X uno spazio topologico.

- Ogni successione è una net ($I = \mathbb{N}$ con l'ordine naturale).
- Ogni funzione $\varphi \colon \mathbb{R} \to X$ è una net perché $\mathbb{R}$ è un insieme diretto. (*Quando è convergente?*)
- Sia I l'insieme di tutti gli intorni di un punto fissato $x \in X$. Definiamo su I una relazione "$\preceq$" con
$$U \preceq V \quad \Leftrightarrow \quad U \supset V.$$
Allora I è un insieme diretto e, scegliendo arbitrariamente $x_U \in U$ per ogni $U \in I$, si ottiene così una net $\{x_U\}_{U \in I}$ convergente a x.
- Sia $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann. Sia I l'insieme di tutte le partizioni di $[a,b]$ con l'ordine dato da
$$P_1 \preceq P_2 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 \subset P_2.$$
Supponiamo che ad ogni partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in I$ sia associato un insieme di punti $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset [a,b]$ tali che
$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, \ldots, n).$$
Consideriamo le somme riemanniane
$$s_P = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$
Allora $\{s_P\}_{P \in I}$ è una net (in $\mathbb{R}$) che converge all'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$. (*Perché?*)
- Sia $I = \{a, b, c\}$ un insieme di tre elementi con la relazione "$\preceq$" data dal seguente elenco:
$$a \preceq a\,,\ b \preceq b\,,\ c \preceq c\,,\ a \preceq b\,,\ b \preceq c\,.$$
Allora I è un insieme diretto e, se poniamo
$$x_a := 1\,,\ x_b := 0\,,\ x_c := -2\,,$$
la net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ converge a -2.

Teorema 4. *Siano X uno spazio topologico, $A \subset X$, $x \in X$.*

(a) *x appartiene a $\overline{A}$ se e solo se esiste una net in A convergente a x.*

(b) *A è chiuso se e solo se per ogni net in A che converge in X, il suo limite appartiene ad A.*

Teorema 5. *Siano X, Y spazi topologici, $f \colon X \to Y$. Allora f è continua se e solo se per ogni net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ convergente ad un punto $x \in X$, il net $\big\{f(x_\alpha)\big\}_{\alpha \in I}$ converge a $f(x)$.*

Per poter formulare una caratterizzazione della compattezza analoga a quella che vale negli spazi metrici, abbiamo bisogno di definire la nozione di una subnet. L'idea è abbastanza naturale.

Possiamo dire che $\{x_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in J}$ è una subnet di una net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se $\{\alpha_\beta\}_{\beta\in J}$ è una net in I che "tende all'infinito" nel senso che

$$\forall\,\alpha_0\in I\;\exists\,\beta_0\in J:\quad \alpha_\beta\succeq\alpha_0 \text{ per ogni } \beta\succeq\beta_0.$$

Ed è esattamente ciò che dice in altre parole la seguente definizione.

Definizione 6. Una net $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ è una *subnet* di una net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se esiste una funzione $\psi\colon J\to I$ tale che

- $y_\beta = x_{\psi}(\beta)$ per ogni $\beta\in J$,
- $\forall\,\alpha_0\in I\;\exists\,\beta_0\in J$ tale che $\psi(\beta)\succeq\alpha_0$ per ogni $\beta\succeq\beta_0$.

Alcuni autori (per es. [M]) richiedono la monotonia della mappa ψ nella definizione.

N.B.: Ogni sottosuccessione di una successione è una subnet. Ma una successione può avere delle subnet che non sono sottosuccessioni. Per esempio, se $x_n = n^2$, allora la net $\{y_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, data da $y_{m,n} = m^2+2mn+n^2$, è una subnet (ma non una sottosuccessione) della successione $\{x_n\}$. (Su $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ consideriamo l'ordine parziale per coordinate.) (*Qual è la funzione ψ in questo caso?*)

Osservazione 7. *Ogni subnet di una net convergente converge allo stesso limite.*

Teorema 8. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni net in X ammette una subnet convergente in X.*

— — —