<u>Insiemi ω-convessi</u> (L.V.)

Insiemi convessi sono esattamente gli insiemi C tali che ogni combinazione convessa di elementi di C appartiene a C. È naturale chiedersi se esistano e quali siano gli insiemi tali che ogni "combinazione convessa infinita" di elementi dell'insieme appartiene anch'essa all'insieme.

Una "combinazione convessa infinita" sarà definita come una serie (che sarà convergente se converge la successione delle sue somme parziali), per cui vi è bisogno di una topologia per definire tali combinazioni. Ci limitiamo qui al caso di spazi normati.

Possiamo definire due tipi di insiemi "infinitamente convessi", a seconda che la convergenza della combinazione convessa sia o meno assicurata.

Definizione. Sia X uno spazio normato. Un insieme $C \subset X$ si dice

(a) *ω-convesso* se per ogni $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C$ e ogni $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset [0, +\infty)$ con $\sum_1^{+\infty} \lambda_n = 1$ tali che la serie $\sum_1^{+\infty} \lambda_n x_n$ converga in X si ha $\sum_1^{+\infty} \lambda_n x_n \in C$.

(b) *fortemente ω-convesso* se per ogni $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C$ e ogni $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset [0, +\infty)$ con $\sum_1^{+\infty} \lambda_n = 1$ si ha che la serie $\sum_1^{+\infty} \lambda_n x_n$ converge in X e la sua somma appartiene a C.

Provate a dimostrare le seguenti proprietà di insiemi in uno spazio normato X.

♣ *Ogni insieme fortemente ω-convesso è ω-convesso. Ogni insieme ω-convesso è convesso.*

♣ *Sia C un insieme convesso. Se C è chiuso o aperto, allora C è ω-convesso.*
(Suggerimento: procedere per assurdo applicando il teorema di Hahn–Banach.)

♣ *Sia L un sottospazio lineare di X. Allora L è ω-convesso se e solo se L è chiuso.*
(Suggerimento: se $\{x_n\}_1^{+\infty}$ è una successione in L e $x_0 = 0$, allora $x_n = \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) = \sum_1^n 2^{-i} \big[2^i (x_i - x_{i-1})\big]$.)

♣ *Sia X uno spazio di Banach. Allora un insieme $C \subset X$ è fortemente ω-convesso se e solo se C è ω-convesso e limitato.*
(Suggerimento: per la "$\Leftarrow$" ricordare che, in uno spazio di Banach, ogni serie assolutamente convergente è convergente; per la "$\Rightarrow$", se C non è limitato, è facile trovare $\{c_n\}_1^{+\infty} \subset C$ tale che $2^{-n} c_n$ non tende a 0 per $n \to +\infty$.)