<u>Funzioni semicontinue</u> (L.V.)

In quanto segue, $\overline{\mathbb{R}}$ denota la retta reale estesa $[-\infty, +\infty]$, e T è uno spazio topologico di Hausdorff.

Definition 0.1. Siano $x_0 \in T$ e $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Diciamo che f è *semicontinua inferiormente* (*s.c.i.*) nel punto x_0 se

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha < f(x_0) \quad \exists\, U \text{ un intorno di } x_0 : \\ \alpha < f(x) \quad \text{per ogni } x \in U.$$

(b) Diciamo che f è *semicontinua superiormente* (*s.c.s.*) in x_0 se

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } f(x_0) < \alpha \quad \exists\, U \text{ un intorno di } x_0 : \\ f(x) < \alpha \quad \text{per ogni } x \in U.$$

Remark 0.2. (a) Osserviamo che f è s.c.s. in x_0 se e solo se $(-f)$ è s.c.i. in x_0. Possiamo, quindi, limitarci a studiare soltanto funzioni semicontinue inferiormente.

(b) Siano (M, d) uno spazio metrico, $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x_0 \in M$ tale che $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Allora f è s.c.i. in x_0 se e solo se:
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in M$ con $d(x, x_0) < \delta$, si ha $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

Ovviamente, *f è s.c.i. in ogni punto isolato di T.* La seguente Proposizione 0.3 è facilmente dimostrabile dalle definizioni. Ricordiamo che, se $x_0 \in T$ è un punto di accumulazione,

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) := \sup_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x)\,,$$

dove $\mathcal{U}(x_0)$ denota l'insieme degli intorni del punto x_0. (È facile vedere che la definizione non cambia se al posto di $\mathcal{U}(x_0)$ sostituiamo una qualsiasi base degli intorni di x_0.)

Proposition 0.3. *Una funzione $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ è s.c.i. in un punto di accumulazione $x_0 \in T$ se e solo se*

$$f(x_0) \le \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Naturalmente, diciamo che una funzione è s.c.i. su T se è s.c.i. in ogni punto di T. Nel teorema seguente abbiamo raccolto alcune caratterizzazioni delle funzioni s.c.i. su T.

Theorem 0.4. *Per una funzione $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *f è s.c.i. su T;*
(ii) *$f(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x)$ per ogni punto di accumulazione $x_0 \in T$;*
(iii) *per ogni $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, l'insieme $\{x \in T:\ f(x) \leq \alpha\}$ è chiuso in T;*
(iv) *per ogni $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, l'insieme $\{x \in T:\ f(x) > \alpha\}$ è aperto in T;*
(v) *l'*epigrafo *$epi(f) = \big\{(x,r) \in T \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\big\}$ è chiuso in $T \times \mathbb{R}$.*

Proof. L'equivalenza $(i) \Leftrightarrow (ii)$ segue da Proposizione 0.3, mentre la $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ è ovvia. Per completare la dimostrazione, è sufficiente mostrare le implicazioni $(iv) \Rightarrow (i)$, $(ii) \Rightarrow (v)$ e $(v) \Rightarrow (iii)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ è un facile esercizio.

$(ii) \Rightarrow (v)$. Supponiamo (ii). Se $(x_n, r_n) \in epi(f)$ e $(x_n, r_n) \to (x, r)$, allora

$$f(x) \leq \liminf_{t\to x} f(t) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} r_n = r,$$

per cui $(x,r) \in epi(f)$.

$(v) \Rightarrow (iii)$. Supponiamo (v). Dimostriamo prima (iii) per α finito. Supponiamo di avere $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x_n) \leq \alpha$, $x_n \to x$. Allora $(x_n, \alpha) \in epi(f)$ e $(x_n, \alpha) \to (x, \alpha)$, e quindi $(x, \alpha) \in epi(f)$, cioè $f(x) \leq \alpha$.
Il caso di $\alpha = -\infty$ segue dal precedente "caso finito" in quanto

$$\{x:\ f(x) \leq -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x:\ f(x) \leq -n\}.$$

Infine, il caso di $\alpha = +\infty$ è del tutto ovvio. □

Segue una proprietà importante per applicazioni.

Theorem 0.5. *Sia K uno spazio compatto di Hausdorff e $f\colon K \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione s.c.i. su K. Allora f assume il suo minimo su K (cioè, $\exists x_0 \in K$: $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in K$).*

Proof. Il teorema è banalmente vero per f costante. Se f non è costante, si ha

$$r := \inf f(K) \in [-\infty, +\infty)$$

e quindi esiste una successione strettamente decrescente $\{r_n\}$ in $(r, +\infty)$ tale che $r_n \searrow r$. Si osservi che

$$f^{-1}(r) = \{x:\ f(x) \leq r\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x:\ f(x) \leq r_n\}.$$

Essendo gli insiemi $\{x:\ f(x) \leq r_n\}$ chiusi, non vuoti (*perché?*) e inscatolati, la loro intersezione è non vuota per la compattezza di K. □