Spazi vettoriali topologici,
spazi localmente convessi
ed il teorema di Hahn-Banach:
informazioni base

(L.V.)

Questo breve testo senza dimostrazioni fornisce soltanto una prima informazione ("infarinatura") su spazi vettoriali topologici e la lettura di esso non può in alcun caso sostituire uno studio serio dell'argomento. Nonostante la teoria si applichi anche a spazi complessi, ci limiteremo qui soltanto al caso di spazi su $\mathbb{R}$.

Spazi vettoriali topologici

♠ *Spazio vettoriale topologico* (brevemente: *spazio v.t.*) è uno spazio vettoriale X con una topologia τ (su X) tale che le applicazioni di somma e multiplo

$$s\colon X \times X \to X\,, \quad s(x,y) = x + y$$
$$m\colon \mathbb{R} \times X \to X\,, \quad m(\alpha,x) = \alpha x$$

siano continue.

♠ Poichè, per ogni fissato $a \in X$, la traslazione $x \mapsto x + a$ è un omeomorfismo (lineare) di X su sé, ogni intorno di un qualsiasi punto di X è traslato di un intorno dell'origine. Per questo motivo, la topologia vettoriale τ è univocamente determinata dal sistema $\mathcal{U}(0)$ degli intorni dell'origine; e viceversa, un sistema $\mathcal{U}(0)$ di sottoinsiemi di uno spazio vettoriale X con

- $U \in \mathcal{U}(0) \Rightarrow 0 \in U$,
- $U \in \mathcal{U}(0)$, $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}(0)$,
- $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(0) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(0)$,
- $\forall\, U \in \mathcal{U}(0)$: $\{x \in U : U - x \in \mathcal{U}(0)\} \in \mathcal{U}(0)$,

determina una topologia vettoriale τ come segue: $A \subset X$ è aperto se per ogni $a \in A$ esiste un $U \in \mathcal{U}(0)$ t.c. $a + U \subset A$. Si osservi che l'ultima delle quattro proprietà richieste per $\mathcal{U}(0)$ dice semplicemente che l'interno di un intorno di 0 è un intorno di 0.

♠ *Base* degli intorni di 0 è una famiglia $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(0)$ tale che

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(0) \quad \exists\, B \in \mathcal{B}: \quad B \subset U.$$

♠ *Sottobase* degli intorni di 0 è una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}(0)$ tale che la famiglia

$$\mathcal{B} = \{A_1 \cap \ldots \cap A_n : n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{A}\ \forall\, i\}$$

(di tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{A}$) sia una base degli intorni di 0.

♠ Ogni spazio v.t. gode delle seguenti due proprietà.

1. Per ogni $U \in \mathcal{U}(0)$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $V \in \mathcal{U}(0)$ tale che

$$\underbrace{V + \cdots + V}_{n \text{ volte}} \subset U.$$

2. Le famiglie

$$\mathcal{B}_1 = \{U \in \mathcal{U}(0) : \ U = -U, \ U \text{ aperto}\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{U \in \mathcal{U}(0) : \ U = -U, \ U \text{ chiuso}\}$$

sono basi degli intorni di 0.

Spazi localmente convessi

♠ Uno spazio v.t. si dice *localmente convesso* se la famiglia

$$\mathcal{C} := \{U \in \mathcal{U}(0) : \ U \text{ convesso}\}$$

è una base degli intorni di 0 in X.

♠ In uno spazio v.t. localmente convesso, le famiglie

$$\mathcal{B}_1 = \{U \in \mathcal{U}(0) : \ U \text{ convesso aperto simmetrico}\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{U \in \mathcal{U}(0) : \ U \text{ convesso chiuso simmetrico}\}$$

sono basi degli intorni di 0.

♠ Sia X uno spazio vettoriale. Diciamo che $p \colon X \to [0, +\infty)$ è una *seminorma* su X se

- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$ ("positiva omogeneità" [con abuso di linguaggio]),
- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$ (subadditività o disuguaglianza triangolare).

♠ Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di seminorme su uno spazio vettoriale X, tale che $\mathcal{P}$ separi l'origine dagli altri punti di X, nel senso che

$$\forall\, x \in X \setminus \{0\} \quad \exists\, p \in \mathcal{P} : \quad p(x) > 0.$$

Sia τ la topologia meno fine nella quale tutte le seminorme di $\mathcal{P}$ sono continue. Allora τ è una topologia vettoriale di Hausdorff su X e gli insiemi

$$A_{p,\varepsilon} = \{x \in X : \ p(x) < \varepsilon\}, \qquad p \in \mathcal{P}, \ \varepsilon > 0,$$

formano una sottobase dei τ-intorni di 0.

Esempi

♠ Ogni spazio normato è uno spazio v.t. localmente convesso.

♠ **Topologia debole.** Sia X uno spazio normato (o uno spazio v.t. localmente convesso). Sia $\mathcal{W}(0)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X del tipo

$$W_{F,\varepsilon} = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon \; \forall f \in F\}, \quad F \subset X^* \text{ finito}, \; \varepsilon > 0.$$

Essa è base degli intorni di 0 per una topologia vettoriale localmente convessa w (su X), cosidetta *topologia debole*. La topologia w può essere definita anche mediante il sistema delle seminorme

$$p_f(x) = f(x), \qquad f \in X^*.$$

È la topologia meno fine che renda continui tutti gli elementi di X^*, per cui $w \preceq \tau$ dove τ è la topologia della norma (o la topologia originale su X). (L'uguglianza $w = \tau$ per la topologia della norma si verifica se e solo se X ha dimensione finita.)

♠ **Topologia debole*.** Si tratta di una topologia vettoriale localmente convessa w^* sul duale X^* di uno spazio normato (o v.t. localmente convesso) X. La famiglia $\mathcal{W}^*(0)$ di tutti i sottoinsiemi di X^* del tipo

$$W^*_{E,\varepsilon} = \{g \in X^* : |g(u)| < \varepsilon \; \forall u \in E\}, \quad E \subset X \text{ finito}, \; \varepsilon > 0,$$

è una base della topologia w^*. La w^* è la topologia meno fine (su X^*) che renda continui tutti gli elementi di X (visti come funzionali su X^*). Essa può essere definita anche mediante il sistema delle seminorme

$$p_u(f) = f(u), \qquad u \in X.$$

Se X è uno spazio normato infinito dimensionale, allora la topologia w^* è strettamente meno fine della topologia della norma su X^*.

♠ Lo spazio $C(\mathbb{R})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, data dalle seminorme

$$p_n(f) = \sup_{|x| \le n} |f(x)|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

è uno spazio v.t. localmente convesso metrizzabile ma non normabile.

Lo stesso vale, ad esempio, anche per lo spazio $C^\infty(\Omega)$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, con la topologia su $C^\infty(\Omega)$ data dalle seminorme

$$p_{D,K} = \sup_{x \in K} |Df(x)|$$

$$K \subset \Omega \text{ compatto}, \quad D \text{ derivata parziale di ordine } k \ge 0.$$

♠ Per $0 < p < 1$, lo spazio $\ell_p = \{x = (x_n) : \sum_1^\infty |x_n|^p < +\infty\}$ è uno spazio vettoriale metrico completo con la metrica

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p.$$

Esso non è localmente convesso: si può dimostrare che ogni suo sottoinsieme aperto convesso non vuoto è illimitato nella metrica d.

♠ Per $0 < p < 1$, lo spazio $L_p[0,1]$ di tutte le funzioni reali misurabili (secondo Lebesgue) su $[0,1]$ tali che $\int_0^1 |f|^p < +\infty$, è uno spazio vettoriale metrico completo con la metrica

$$d(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p \,.$$

Esso non è localmente convesso: l'unico suo sottoinsieme aperto convesso non vuoto è lo spazio stesso.

Le stesse proprietà sono soddisfatte dallo spazio $L_0[0,1]$ di tutte le funzioni misurabili su $[0,1]$, con la metrica

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \,.$$

La convergenza in $L_0[0,1]$ è la convergenza in misura.

Teoremi di separazione

Il teorema di Hahn–Banach sull'estensione di funzionali continui ammette una formulazione equivalente (nel senso che essa segue facilmente dal teorema di H.–B. e, viceversa, il teorema di H.–B. è un suo facile corollario) in termini di separazione di insiemi convessi.

Teorema 1. *Siano A, B due insiemi convessi in uno spazio v.t. X. Se l'interno di A non è vuoto e non interseca B, allora esiste un funzionale $f \in X^* \setminus \{0\}$ tale che*

$$\sup f(A) \le \inf f(B)$$

(cioè, se $\sup f(A) \le \alpha \le \inf f(B)$, l'iperpiano chiuso $f^{-1}(\alpha)$ separa A e B). *Inoltre, f separa strettamente* $\mathrm{int}(A)$ *e B, nel senso che*

$$f(a) < \inf f(B) \qquad \forall\, a \in \mathrm{int}(A).$$

Corollario 2. *Siano X uno spazio v.t., $D \subset X$ un insieme convesso con $\operatorname{int}(D) \neq \emptyset$, $x_0 \in X \setminus \operatorname{int}(D)$ un punto. Allora esiste $f \in X^* \setminus \{0\}$ tale che*

$$f(x_0) \geq \sup f(D), \qquad f(x_0) > f(y) \quad \forall\, y \in \operatorname{int}(D).$$

Teorema 3. *Siano A, B due insiemi convessi chiusi disgiunti in uno spazio v.t. localmente convesso. Se almeno uno dei due insiemi è compatto, allora esiste un funzionale $f \in X^*$ che separa fortemente A e B, nel senso che*

$$\sup f(A) < \inf f(B).$$

Corollario 4. *Siano X uno spazio v.t. localmente convesso, $C \subset X$ un insieme convesso chiuso, $x_0 \in X \setminus C$. Allora esiste un funzionale $f \in X^*$ tale che*

$$f(x_0) > \sup f(C).$$

♠ Si osservi che l'ipotesi di locale convessità nel Teorema 3 non può essere omessa: negli spazi $L_p[0,1]$ $(0 \leq p < 1)$, l'unico funzionale continuo lineare è quello nullo (ciò segue dal fatto che, in tali spazi, non vi sono semispazi aperti; v. Esempi).

— — —

`Testo consigliato:` W. Rudin, *Functional Analysis*.