REGISTRO DELLE ESERCITAZIONI
DI ANALISI COMPLESSA
corso della prof.ssa M. Salvatori, 2012–2013

08/10/2012 [2 ore: 1,2]

- Rappresentare graficamente i sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ definiti dalle seguenti relazioni
  (i) $|z - w_1| = |z + w_2|$ $(w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ dati$)$
  (ii) $\frac{1}{z} = \overline{z}$
  (iii) $\mathrm{Re}(az + b) > 0$ $(a, b \in \mathbb{C}$ dati, $a \neq 0)$
  (iv) $|z| = \mathrm{Re}(z) + 1$

- **Esercizio per voi:** come sopra, con $|2z - i| = |z + 1|$.

- Sia $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Dimostrare che per ogni $a, b, n \in \mathbb{N}_0$ esistono $x, y \in \mathbb{N}_0$ tali che
$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2 .$$

- Per $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, calcolare la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

- Calcolare i raggi di convergenza:
  (i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} n^\alpha z^n$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R}$ dato$)$
  (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$
  (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n}$

- **Proiezione stereografica e il punto all'infinito.**
  Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la sfera S data dall'equazione $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ (cioè, centrata nel punto $(0, 0, 1)$ e di raggio 1). Sia $N = (0, 0, 2)$ il "polo nord". Ad ogni punto $P = (x, y, z) \in S \setminus \{N\}$ associamo l'unico punto $Q = (u, v, 0)$ del piano $z = 0$ tale che P appartenga al segmento $(N, Q]$. Abbiamo così definito una funzione
$$F \colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}, \quad F(x, y, z) = u + iv .$$

Tale funzione è un omeomorfismo tra $S \setminus \{N\}$ e $\mathbb{C}$.
Possiamo estendere F a un omeomorfismo tra S e $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (dove ∞, il *punto all'infinito*, è un nuovo punto aggiunto a $\mathbb{C}$), ponendo

$$F(N) = \infty$$

e definendo una base degli intorni di ∞ come gli insiemi del tipo

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \qquad (r > 0).$$

Abbiamo cosí "compattificato" $\mathbb{C}$. Identificando S con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, possiamo definire

$$S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

che viene chiamata la *sfera di Riemann*.
Si noti che $z \to \infty$ equivale a dire $\frac{1}{z} \to 0$.

15/10/2012 [2 ore: 3,4]

- *Breve commento alla volta scorsa:* una variante della proiezione stereografica.

- Siano $z, w \in \mathbb{C}$, $\overline{w}z \neq 1$. Allora la quantità $\left|\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|$ è:

$$\begin{cases} < 1 & \text{se e solo se: } |w|, |z| < 1 \text{ o } |w|, |z| > 1; \\ = 1 & \text{se e solo se: } |w| = 1 \text{ o } |z| = 1; \\ > 1 & \text{se e solo se: } \min\{|w|, |z|\} < 1 < \max\{|w|, |z|\}. \end{cases}$$

- Sia $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Denotiamo $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Allora la funzione

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

definisce una biiezione del disco chiuso $\overline{\mathbb{D}}$, tale che

$$f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}, \quad f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}, \quad f(a) = 0.$$

- Al variare di $a, c \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{C}$, descrivere l'insieme

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0 \right\}.$$

(a) Sia $a = 0$. Se $b \neq 0$ allora E è una retta (e ogni retta è di questa forma). Se $b = 0$ allora $E = \emptyset$ (se $c \neq 0$) oppure $E = \mathbb{C}$ (se $c = 0$).
(b) Sia $a \neq 0$.
Se $ac < |b|^2$ allora E è la circonferenza centrata in $-\frac{b}{a}$, di raggio

$\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{a}$. (E vice versa, ogni corconferenza coincide con E per opportuni valori di a, b, c.)
Se $ac = |b|^2$ allora $E = \{-\frac{b}{a}\}$.
Se $ac > |b|^2$ allora $E = \emptyset$.
In *conclusione*, l'equazione

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \qquad \text{con } a, c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C},\ ac < |b|^2$$

è l'equazione generale di rette e/o circonferenze in $\mathbb{C}$.

- **Esercizio per voi.** Dimostrare che ogni *trasformazione di Möbius* non costante,

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \text{con } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\ \alpha\delta \neq \beta\gamma,$$

trasforma ogni retta/circonferenza in una retta o in una circonferenza.

- Le condizioni di Cauchy–Riemann. Quelle classiche

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

possono essere scritte in varie forme:
(i) $f_x = \frac{1}{i} f_y$;
(ii) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$;
(iii) $u_\rho = (1/\rho)v_\theta, \quad (1/\rho)u_\theta = -v_\rho$.
Inoltre, se f è derivabile in z, allora $f'(z) = f_x(z)$.

- Stabilire in quali punti sono derivabili (in senso complesso) le funzioni

$$f(x+iy) = x^2 + iy^2\,, \quad g(z) = e^{z\bar{z}} - 2z\,, \quad h(z) = \mathrm{Log}(z)\,,$$

dove $\mathrm{Log}(z)$ denota il "ramo principale" del logaritmo complesso (escludendo il semiasse reale negativo): per $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, si ha $\mathrm{Log}(z) = \log\rho + i\theta$.

- **Esercizio per voi.** Calcolare $h'(z)$, dove h è come sopra.

- Sviluppare la funzione $f(z) = \frac{1}{1-z}$ in una serie di potenze centrata in un punto z_0 tale che $|z_0| < 1$.
[Commento: la funzione f ha uno sviluppo in serie geometrica, convergente nel disco $|z| < 1$. Secondo la teoria, esiste uno sviluppo centrato in z_0 ed esso converge almeno nel disco $|z - z_0| < 1 - |z_0|$ (cioè, il massimo disco centrato in z_0, contenuto nel disco $|z| < 1$). Calcolando effettivamente lo sviluppo, si arriva ad una serie di potenze convergente nel disco $|z - z_0| < |1 - z_0|$ che è, in generale, strettamente più grande di quello minimo previsto dalla teoria (tranne quando z_0 appartiene all'intervallo reale $[0, 1)$).]

22/10/2012 [2 ore: 5,6]

- $f(z) = e^z$, $f(A) = ?$
  (i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \mathrm{Im}(z) \leq \beta\}$ con $0 < \beta - \alpha < 2\pi$;
  (ii) $A = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$;
  (iii) $A = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}(z) < b\}$ con $a < b$.

- $f(z) = \mathrm{Log}(z)$, $f(B) = ?$
  (i) $B = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z| \leq 1,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$;
  (ii) $B = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}z \geq 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

- Si noti che $e^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, mentre $\sin \mathbb{C} = \mathbb{C}$, $\cos \mathbb{C} = \mathbb{C}$.

- Per $f(z) = \sin z$ abbiamo:
  - $\sin(x+iy) = \sin x\ \cos(iy) + \cos x\ \sin(iy) = \sin x\,\mathrm{Ch}(y) + \cos x\,\mathrm{Sh}(y)$
  - per $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = x_0\}$,
    (i) se $\sin x_0 \neq 0 \neq \cos x_0$ allora $f(E)$ è il ramo dell'iperbole $\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1$ giacente nel semipiano (rispetto all'asse delle v) contenente $\sin x_0$;
    (ii) se $\sin x_0 = 0$ allora $f(E)$ è la retta $i\mathbb{R}$;
    (iii) se $\cos x_0 = 0$ allora $f(E) = \mathrm{sgn}(\sin x_0) \cdot [1, +\infty)$.
  - per $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = y_0\}$,
    (i) se $y_0 \neq 0$ allora $f(E)$ è l'ellisse $\frac{u^2}{\mathrm{Ch}^2(y_0)} + \frac{v^2}{\mathrm{Sh}^2(y_0)} = 1$;
    (ii) se $y_0 = 0$ allora $f(E) = [-1, 1]$.

- Sia $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Calcolare
$$\mu(m) = \min_{z \in \partial Q_m} |\sin z|$$
dove $Q_m = \left[-(m + \frac{1}{2})\pi, (m + \frac{1}{2})\pi\right] \times \left[-(m + \frac{1}{2})\pi, (m + \frac{1}{2})\pi\right]$.
[Dalla formula
$$|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \mathrm{Sh}^2(y)$$
(vale anche $|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \mathrm{Sh}^2(y)$), si ottiene facilmente che $\mu(m) = \min\{1, \mathrm{Sh}(\frac{\pi}{2})\} = 1$ per ogni $m \geq 0$ intero.]

- **Esercizio per voi.** Trovare tutti i periodi complessi della funzione $\sin z$. (Si chiede di determinare tutti i $w \in \mathbb{C}$ tali che $\sin(z+w) = \sin z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.)

- Ripasso sull'integrale lungo curve $\int_\gamma f\,dz$, usato in Analisi Complessa, e un breve confronto con $\int_\gamma f\,ds$ (integrale curvilineo) e con $\int_\gamma \langle f, d\mathbf{s}\rangle = \int_\gamma \mathrm{Re}(f)\,dx + \mathrm{Im}(f)\,dy$ (lavoro del campo vettoriale f, inteso come funzione da [un sottoinsieme aperto di] $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$).

- Sia $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ una curva regolare [o regolare a tratti] tale che $\gamma(\alpha) = 2i$, $\gamma(\beta) = -3i$ e $\mathrm{Re}(\gamma(t)) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz\,.$$

- **Integrali di Fresnel** $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ **e** $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt\,.$
Tramite una sostituzione $t^2 = s$, si dimostra che essi non esistono come integrali di Lebesgue; operando poi un'integrazione per parti, si deduce facilmente che i due integrali esistono invece come integrali impropri di Riemann. Tuttavia, la convergenza seguirà "gratis" dal nostro procedimento.
I due integrali di Fresnel sono la parte reale e quella immaginaria dell'integrale (improprio) $J = \int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$.
Per $R > 0$, sia γ_R la frontiera dell' "trancio di pizza"
$$\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}:\ 0 < r < R,\ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{4}\}\,,$$
orientata in senso antiorario. La curva γ_R consiste in tre tratti:
  - φ_R, il segmento $[0,R] \subset \mathbb{R}$ percorso verso destra;
  - ψ_R, l'arco di circonferenza percorso in senso antiorario;
  - σ_R, il segmento $[0,R]e^{i\pi/4}$ percorso verso l'origine.

  Per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy, si ha
$$0 = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_{\varphi_R} e^{iz^2}\,dz + \int_{\psi_R} e^{iz^2}\,dz + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}\,dz\,.$$
Al tendere $R \to +\infty$, il secondo dei tre integrali tende a zero (v. homework, Foglio 1).
Il terzo integrale tende a $-e^{i\pi/4}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$
Quindi alche il primo integrale ammette limite per $R \to +\infty$, e questo limite e il nostro integrale J.
Conclusione. $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$

29/10/2012 [2 ore: 7,8]

- *"Teorema di Lagrange" per funzioni olomorfe.*
Sia f una funzione olomorfa in un dominio Ω contenente un segmento non banale $[a,b]$ (cioè il segmento che collega due punti $a,b\in\Omega$). Allora
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\in \operatorname{conv} f'([a,b])\,,$$
dove $\operatorname{conv} E$ denota l'involucro convesso di E.
Utilizzeremo i seguenti fatti noti.
(a) Se $K\subset\mathbb{R}^n$ è compatto allora anche $\operatorname{conv} K$ è compatto (teorema di Carathéodory).
(b) Se $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ e $g\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ è una funzione continua, allora
$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n$$
dove
$$\sigma_n=\sum_{j=1}^n g\Big(\alpha+\tfrac{j(\beta-\alpha)}{n}\Big)\,\tfrac{(\beta-\alpha)}{n}$$
è la "somma riemanniana" relativa alla partizione
$$P_n=\Big\{\alpha+\tfrac{j(\beta-\alpha)}{n}: j=0,1,\dots,n\Big\}$$
di $[\alpha,\beta]$ in n intervallini della stessa lunghezza, e alla scelta del estremo destro in ciascuno degli intervallini. (Per dimostrarlo si usa la uniforme continuità di f. Ovviamente, lo stesso risultato vale anche per $g\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$; basta considerare separatemente le parti reale e immaginaria di g.)
Ora possiamo dimostrare il nostro "teorema di Lagrange":
$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f'(z)\,dz\\&=\int_0^1 f'(a+t(b-a))\,dt\\&=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n\end{aligned}$$
dove $\sigma_n=\sum_{i=j}^n f'\big(a+\frac{j}{n}(b-a)\big)\,\frac{1}{n}\in\operatorname{conv} f'([a,b])$. Ora, la tesi segue da (a).

- *Corollario.* Se $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ è un dominio convesso, f è olomorfa in Ω e $0\notin\operatorname{conv} f'(\Omega)$, allora f è iniettiva in Ω.

- Dimostrare che f è iniettiva su Ω.

(i) $f(z) = a + nz + z^n$ (con $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$), $\Omega = D(0,1) := \{|z| < 1\}$;
(ii) $f(z) = e^z - z$, $\Omega = \{\mathrm{Re}(z) < 0\}$;
(iii) $f(z) = z^3 + 3z$, Ω è il dominio convesso (illimitato) delimitato dalla curva $\{x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$.

- *Ripasso della formula di Cauchy.* Se f è olomorfa in un cerchio contenente il sostegno della curva chiusa ($\mathcal{C}^1$ a tratti) γ, allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \qquad (m \in \mathbb{N}\cup\{0\}),$$

in particolare,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)\,.$$

Se γ è una curva chiusa semplice percorsa in senso antiorario, $\mathrm{Ind}_\gamma(w)$ vale 1 se w appartiene alla componente limitata del complementare del sostegno di γ, mentre vale 0 se w appartiene alla componente illimitata.

- Sia $\frac{1}{2} < r < 1$. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial D(0,r)} \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{2z-i}\,dz\,.$

- $\displaystyle\int_{\partial D(i,3)} \frac{e^z}{z^2+5}\,dz$

- $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz$

- $\displaystyle\int_{\partial D(2+i,\sqrt{2})} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}\,dz$

05/11/2012 [2 ore: 9,10]

- Determinare tutte le funzioni olomorfe in un intorno di 0, tali che

$$f'(z) = z\,f(z)\,.$$

Abbiamo visto due possibili soluzioni.
(i) Usare lo sviluppo di f in serie di Taylor centrata in 0.

(ii) Se $f \in H(D(0,r))$ soddisfa la nostra equazione differenziale, allora la sua restrizione sull'intervallo reale $(-r,r)$ soddisfa l'equazione differenziale $\frac{df}{dx}(x) = xf(x)$; essa deve quindi essere della forma $f(x) = ce^{x^2/2}$ con $c \in \mathbb{C}$. Ora, la funzione $\widetilde{f}(z) = ce^{z^2/2}$ è anch'essa olomorfa su $D(0,r)$ e coincide con f su $(-r,r)$. Per il principio d'identità, $f = \widetilde{f}$ su $D(0,r)$.

- Serie binomiale:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha\,, \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ |z| < 1.$$
Idea. Fissato $\alpha \in \mathbb{C}$, la funzione $f(z) = (1+z)^\alpha$ è olomorfa in $\{z \notin (-\infty,-1]\}$. Pertanto, essa è la somma della sua serie di Taylor (centrata in 0) nel disco $\{|z| < 1\}$. Siccome $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$, ciò implica la nostra formula.
Un'idea alternativa proposta da uno studente. Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange, si dimostra la nostra formula per $z \in (0,1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Per $z \in (0,1)$ fissato, consideriamo le funzioni $F(\alpha) = (1+z)^\alpha$ e $G(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$. Esse sono olomorfe su $\mathbb{C}$ (ci vuole qualche conto per dimostrarlo) e coincidono su $\mathbb{R}$. Per il principio d'identità esse coincidono dappertutto, e quindi la formula vale per $z \in (0,1)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Applicando un'altra volta il principio d'identità (questa volta con $\alpha \in \mathbb{C}$ fissato), concludiamo la dimostrazione.

- Dimostrare che la successione di funzioni
$$f_k(z) = z\,e^{-k^2z^2}$$
(i) converge uniformemente su $\mathbb{R}$;
(ii) non converge uniformemente in alcun intorno di 0.

- Dimostrare che la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{(1-z^k)(1-z^{k+1})}$$
converge uniformemente sui compatti in $\{|z| \neq 1\}$ e la sua somma vale $\frac{z}{(1-z)^2}$ in $\{|z| < 1\}$, e $\frac{1}{(1-z)^2}$ in $\{|z| > 1\}$.

- Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f \in H(\Omega)$ non costante. Se $f(\Omega) \subset \overline{D(z_0,r)}$, allora $f(\Omega) \subset D(z_0,r)$.
(Principio del massimo modulo con $g(z) = f(z) - z_0$.)

- Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f \in H(\Omega)$. Se una delle funzioni $\mathrm{Re}(f(z))$, $\mathrm{Im}(f(z))$ ha un estremante relativo in Ω, allora f è costante in Ω. (Principio del massimo modulo per una delle funzioni $e^{\pm f(z)}$, $e^{\pm i f(z)}$.)

12/11/2012 [2 ore: 11,12]

- *Ripasso delle stime di Cauchy.* Se f è olomorfa in un aperto contenente $\overline{D(z_0, r)}$, allora
$$\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} \leq \frac{1}{r^k} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \qquad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

- Sia $f \in H(D(0,1))$ tale che $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ in $D(0,1)$. Sia
$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$
lo sviluppo in serie di Taylor di f. Trovare una stima dall'alto per
$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{n} \,.$$
[$\limsup(|a_n|/n) \leq e$]

- Sia $f \in H(\mathbb{C})$ tale che $|f(z)| \leq e^{\sqrt{|z|}}$. Dimostrare che
$$\lim_{n \to +\infty} f^{(n)}(0) = 0 \,.$$
[Addirittura vale $\sum_0^\infty |f^{(n)}(0)| < +\infty$.]

- Supponiamo che $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ abbia in 0 un polo di ordine 2 e che soddisfi:
  (a) $\lim_{z \to \infty} f(z) = 1$;
  (b) $\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = 2$;
  (c) $\int_{|z|=1} f(z)\, dz = \pi$.
  Determinare la funzione f! [$f(z) = 1 - \frac{i}{2z} + \frac{2}{z}$]
  Come "sottoprodotto" abbiamo osservato che:
  se una funzione intera (cioè, olomorfa su $\mathbb{C}$) g soddisfa, in un intorno di ∞, una stima del tipo $|g(z)| \leq c|z|^k$ (per qualche $c \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), allora g è un polinomio di grado $\leq k$.

- Sviluppare la funzione
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$$
nei seguenti insiemi:
(i) $A = \{0 < |z| < 1\}$;
(ii) $B = \{|z| > 1\}$;
(iii) $C = \{|z-1| < 1\}$;
(iv) $D = \{1 < |z-1| < \sqrt{2}\}$;
(v) $E = \{|z-1| > \sqrt{2}\}$.

- *Singolarità isolate – ripasso.* Sia $f \in H(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ avente lo sviluppo (di Laurent)
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (0 < |z - z_0| < r).$$
Denotiamo
$$M = \{k \in \mathbb{Z} : \ k < 0, \ a_k \neq 0\}.$$
Vi sono tre possibilità:
(i) M è vuoto $\Leftrightarrow$ z_0 è una singolarità eliminabile $\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;
(ii) M è finito $\Leftrightarrow$ z_0 è un polo (di ordine $m = |\min M|$) $\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
(iii) M è infinito $\Leftrightarrow$ z_0 è una singolarità essenziale $\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} f(z)$ non esiste.

Inoltre, per una funzione f olomorfa in un intorno di ∞, possiamo considerare anche ∞ come una singolarità isolata. In questo caso, definiamo:
$$\infty \textit{ è per } f(z) \textit{ ciò che è } 0 \textit{ per } f(1/z).$$
Quindi, anche in questo caso, abbiamo:
$$\infty \textit{ è una s.eliminabile/un polo/una s.essenziale}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\lim_{z \to \infty} f(z) \textit{ esiste finito/vale } \infty\textit{/non esiste.}$$

19/11/2012 [2 ore: 13,14]

- Se z_0 è uno zero di ordine m (m-zero) per f, e uno p-zero per g, allora esso è uno $(m-p)$-zero per f/g.
Convenzione: uno k-zero con $k < 0$ è un polo di ordine k.

- *Residui – ripasso.*
  Se $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ per $0 < |z - z_0| < r$, definiamo
  $$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}\,.$$
  Se $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ per $|z| > r$, definiamo
  $$\mathrm{Res}(f, \infty) = -a_{-1}\,.$$

- $\mathrm{Res}\big(f(z), \infty\big) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\, f(\frac{1}{z}), 0\right)$

- Se z_0 è un m-polo per f, allora
  $$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big[(z - z_0)^m f(z)\big]\,.$$

- Se $f, g \in H(D(z_0, r))$, $f(z_0) \neq 0$, e z_0 è uno zero semplice per g, allora
  $$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

- Se $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_N\})$, allora
  $$\mathrm{Res}(f, \infty) + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k) = 0\,.$$
  (Segue dal teorema dei residui.)

- Per le seguenti funzioni, classificare tutte le singolarità e calcolare i residui in quelle isolate.

  (i) $f_1(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$

  (ii) $f_2(z) = \dfrac{z^5}{(1 - z)^2}$

  (iii) $f_3(z) = \dfrac{e^z}{1 + z^2}$

  (iv) $f_4(z) = \dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$

  (v) $f_5(z) = \exp\left(\dfrac{z}{z - 1}\right)$

  (vi) $f_6(z) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)}{e^z - 1}$

(vii) $\quad f_7(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\cos(1/z)}\right)$

- **Problema aperto:** calcolare $\mathrm{Res}(f_6, 1)$ e $\mathrm{Res}(f_7, z_k)$ dove $z_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$. (In aula non ci siamo riusciti!)

27/11/2012 [2 ore: 15,16]

- **Teorema dei residui** – una versione leggermente meno generale di quella fatta nel corso.
Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso, $F \subset \Omega$ un insieme finito, $f \in H(\Omega \setminus F)$, γ una curva chiusa $\mathcal{C}^1$ a tratti avente sostegno contenuto in $\Omega \setminus F$. Allora
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{w \in F} \mathrm{Res}(f, w) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(w)\,.$$

- $\displaystyle\int_\varphi \frac{z+1}{z^2+1}\,dz$ dove $\varphi(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$
[Completare la curva con il tratto orizzontale tra -2 e 2, e applicare il teorema dei residui.]

- Se $R = R(x, y)$ è una funzione razionale che non abbia poli nell'insieme $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, allora
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}\,dz\,.$$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{a + \cos t}\,dt \quad (a > 1)$

- **"Trucchi" di Jordan.**
(i) Se $z = re^{it}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, allora
$$|e^{iz}| = \left|e^{ire^{it}}\right| = e^{-r\sin t} \le e^{-2rt/\pi}\,.$$
In particolare,
$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^\pi e^{-r\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}\,dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2rt/\pi}\,dt \\ = \tfrac{\pi}{r}(1 - e^{-r}) \le \tfrac{\pi}{r}\,.\end{aligned}$$

(ii) Se $\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$, e f ha un polo semplice in z_0, allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\, dz = (\beta - \alpha) i \cdot \mathrm{Res}(f, z_0)\,.$$

- Siano $R = R(x)$ una funzione razionale. Gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \left\{ \begin{matrix} e^{ix} \\ \cos x \\ \sin x \end{matrix} \right\} dx$$

possono essere calcolati integrando, rispettivamente,

$$f(z) = R(z)\,, \qquad f(z) = R(z) e^{iz}$$

lungo $\partial\Omega_r$ dove $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (facendo tendere $r \to +\infty$).
Attenzione: se R ha dei poli su $\mathbb{R}$, allora bisogna togliere da Ω_r un "morso" di raggio ε attorno a ciascun tale polo (facendo tendere anche $\varepsilon \to 0^+$).

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^6}\, dx$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + b^2}\, dx \quad (b > 0)$

3/12/2012 [2 ore: 17,18]

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$

- Integrali del tipo

$$\int_0^{+\infty} x^a R(x^m)\, dx$$

dove R è una funzione razionale non avente poli su $(0, +\infty)$, e $m \geq 2$ è intero.
Si integra lungo la frontiera di un "trancio di pizza", composta dal segmento da 0 a r (> 0), dall'arco circolare (centrato in 0) da r a $re^{2\pi i/m}$, e dal segmento da $re^{2\pi i/m}$ a 0. In alcuni casi (quando $a \notin \mathbb{Z}$ oppure quando R ha un polo in 0), bisogna togliere un "morso" di un piccolo raggio $\varepsilon > 0$ attorno a 0. Nella definizione di z^a va usato un opportuno ramo del logaritmo.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^3}\,dx \qquad (a \in \mathbb{R})$

- Integrali dei tipi
$$\int_0^{+\infty} x^a\, R(x)\, dx\,, \qquad\qquad \int_0^{+\infty} (\log x)\, R(x)\, dx$$
dove la funzione razionale R non ha poli in $(0,+\infty)$.
Ciò corrisponderebbe al caso precedente con $m = 1$. Il percorso è analogo, ma bisogna capire bene in che senso. Per $0 < \varepsilon < r$ e $0 < \alpha < \pi$, consideriamo la curva chiusa $\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}$ composta da:
  – il segmento da $\varepsilon e^{i\alpha}$ a $re^{i\alpha}$,
  – l'arco circolare da $re^{i\alpha}$ a $re^{i(2\pi-\alpha)}$ in senso antiorario,
  – il segmento da $re^{i(2\pi-\alpha)}$ a $\varepsilon e^{i(2\pi-\alpha)}$,
  – l'arco circolare da $\varepsilon e^{i(2\pi-\alpha)}$ a $\varepsilon e^{i\alpha}$ in senso orario.
Consideriamo (per il primo integrale di sopra) la funzione
$$f(z) = \exp(a\mathrm{Log}_{(2\pi)} z) \cdot R(z)$$
dove $\mathrm{Log}_{(2\pi)} z$ è il ramo del logaritmo avente la parte immaginaria compresa in $(0, 2\pi)$; cioè, $\mathrm{Log}_{(2\pi)} z = \log|z| + i\theta$ se $z = |z|e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$. Dopo si passa ai limiti:
$$\lim_{R\to+\infty,\, \varepsilon\to 0+} \left(\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}} f(z)\, dz \right) .$$
Si può immaginare l'espressione tra parentesi come l'integrale lungo la curva $\gamma_{R,\varepsilon}$ composta da:
  – il segmento da ε a r,
  – l'arco circolare da r a r in senso antiorario,
  – il segmento da r a ε,
  – l'arco circolare da ε a ε in senso orario;
dove la parte immaginaria del logaritmo vale 0 sul primo segmento, e vale 2π sul secondo segmento.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x}\,dx \qquad (a \in \mathbb{R})$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{\mathrm{Ch}(x)}\,dx \quad$ con $a \in \mathbb{R}$.
Si integra sul bordo del rettangolo $(-r, r) \times (0, \pi)$.

- *(Esercizio proposto.)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{Sh}(x)}\,dx$

10/12/2012 [2 ore: 19,20]

- Integrali dei tipi
$$\int_a^b R(x)\,dx\,, \qquad \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^p R(x)\,dx$$
dove $-\infty < a < b < +\infty$, $p \in \mathbb{R}$, $0 < |p| < 1$, e R è una funzione razionale non avente poli in $[a,b]$.
  - Ponendo $\Phi(z) = \frac{z-a}{z-b}$, la funzione $\operatorname{Log}\Phi(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus[a,b]$.
  - Si applica il teorema dei residui, rispettivamente, ai seguenti integrali
$$\int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \operatorname{Log}\Phi(z)\cdot R(z)\,dz\,, \qquad \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \Phi(z)^p\,R(z)\,dz\,,$$
dove $\Phi(z)^p = \exp\{p\operatorname{Log}\Phi(z)\}$, e $\gamma_{r,\varepsilon}$ è il ciclo (omologo a 0 in $\mathbb{C}\setminus[a,b]$) consistente delle seguenti due curve:
    (i) la circonferenza $\varphi = \partial D(0,r)$ (percorsa in senso orario);
    (ii) la curva chiusa composta da: la circonferenza $\psi_1 = \partial D(a,\varepsilon)$ percorsa in senso orario, il segmento σ_1 da $a+\varepsilon$ a $b-\varepsilon$ (considerato con $\mathrm{Im}(z) = 0^+$), la circonferenza $\varphi_2 = \partial D(b,\varepsilon)$ percorsa in senso orario, il segmento σ_2 da $b-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$ (considerato con $\mathrm{Im}(z) = 0^-$).
  - Su σ_1, $\operatorname{Arg}\Phi(z) = -\pi$. Su σ_2, $\operatorname{Arg}\Phi(z) = \pi$.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

- *Una curiosità.* Sul libro di Ahlfors (p.159), il teorema dei residui viene applicato per calcolare (in modo non proprio semplice) l'integrale $\int_0^\pi \log(\sin x)\,dx$. Ma questo integrale può essere calcolato in due tre righe usando solo proprietà elementari dell'integrale e un trucco basato sulle proprietà e simmetrie delle funzioni trigonometriche.

- La prossima volta utilizzeremo il teorema dei residui per calcolare le somme delle serie numeriche dei tipi
$$\text{(I)} \quad \sum_{n=-\infty,\,Q(n)\neq 0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}\,,$$

(II) $$\sum_{n=-\infty,Q(n)\neq 0}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}\,,$$

dove P, Q sono polinomi. Denotando $d := \mathrm{gr}(Q) - \mathrm{gr}(P)$, si ha:

- se $d \geq 2$ allora le serie (I),(II) convergono assolutamente;
- se $d = 1$ allora la (II) converge semplicemente (nel senso che convergono entrambe le sue "metà") secondo il criterio di Leibniz;
- se $d = 1$ allora la (I) converge p.v. (nel senso del "valor principale secondo Cauchy"), cioè, la successione delle somme parziali simmetriche converge.

A differenza delle altre due convergenze, la convergenza p.v. non implica che il termine generale tenda a 0 per $|n| \to +\infty$.

17/12/2012 [2 ore: 21,22]

- Integrali del tipo
$$\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta\, R(x)\, dx$$
dove $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, $\alpha + \beta = \pm 1$.
Essi possono essere scritti nella forma
$$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^\alpha \, \big[(b-x)^{\pm 1} R(x)\big]\, dx$$
che è il secondo tipo dell'altra volta (con la sola differenza che la funzione razionale tra le parentesi quadre può avere un polo nel punto b; in tal caso l'integrale sulla circonferenza $|z - b| = \varepsilon$ [in senso orario] tende, per $\varepsilon \to 0^+$, ad un opportuno multiplo del residuo in b).

- *Applicazione del teorema dei residui al calcolo delle somme di alcune serie* – si veda il relativo file.

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

- *Una curiosità.* E' noto che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \in \pi^{2k}\mathbb{Q}$. Dall'altra parte, si può dimostrare (con metodi di Analisi matematica 2) che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \notin \pi^3\mathbb{Q}$.

- Trovare una corrispondenza bi-olomofra tra il semicerchio $\{|z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ e il semipiano $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$.
  (Tramite l'applicazione di Möbius che manda i punti $-1, 1, i$ nei punti, nell'ordine, $0, \infty, i$, il semicerchio viene trasformato nel primo quadrante. Applicando poi la funzione z^2, trasformiamo il quadrante nel semipiano superiore.)