Cognome.............................. Nome......................... Matricola...................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova di esame)

6 febbraio 2013 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione A

1] (4 pt.) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie:

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 6} \right)^n .$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Determinare tutti i numeri complessi z per cui $z^4 = -\pi^4$.
Soluzione:

3] (4 pt.) Per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{x - \arctan x}{\log(1 + 5x^2)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua nel punto $x = 0$? Per quali valori la funzione risulta derivabile in $x = 0$?
Soluzione:

4] (4 pt.) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{x^2}{x+7} + |x|, \quad x \in (-7, 3] \right\}.$$

Specificare se si tratta di massimo o minimo.
Soluzione:

5] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = (a^2 - 1)x + a(a+1)x^2 + (a-1)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Determinare per quali a la funzione ha un punto critico (stazionario) in $x = 0$, per quali a tale punto critico é di minimo relativo, e per quali a é di massimo relativo.

Soluzione:

6] (4 pt.) Siano

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \geq 100\right\},$$

$$B = \left\{\left(0, 3 - \frac{1}{k}\right) \quad , \quad k \in \mathbb{N}\right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora:

$\overset{\circ}{C}=$ ....

$\partial C =$ ....

$C' =$ ....

7] (6 pt.) Determinare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)\log\left(\frac{n+3}{n}\right) - 6 + n^5 e^{-n}}{2^{1/n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Cognome............................ Nome....................... Matricola..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova di esame)

6 febbraio 2013 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione B

1] (4 pt.) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie:

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta \log n} \left(\frac{\beta - 1}{\beta - 6} \right)^n .$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Determinare tutti i numeri complessi z per cui $z^4 = -16$.

Soluzione:

3] (4 pt.) Per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{x - \arctan x}{\log(1 + \pi x^2)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua nel punto $x = 0$? Per quali valori la funzione risulta derivabile in $x = 0$?

Soluzione:

4] (4 pt.) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{x^2}{x+1} + |x|, \quad x \in (-1, 3] \right\}.$$

Specificare se si tratta di massimo o minimo.

Soluzione:

5] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = (a^2 - 1)x + a(a-1)x^2 + (a+1)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Determinare per quali a la funzione ha un punto critico (stazionario) in $x = 0$, per quali a tale punto critico é di minimo relativo, e per quali a é di massimo relativo.

Soluzione:

6] (4 pt.) Sia

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \geq 100\right\},$$
$$B = \left\{\left(0, 3 + \frac{1}{k}\right) \quad , \quad k \in \mathbb{N}\right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora:

$\overset{\circ}{C}$= ....

∂C = ...

C' = ...

7] (6 pt.) Determinare, se esiste,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+5)\log\left(\frac{n+5}{n}\right) - 10 + n^3 e^{-n}}{3^{1/n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Cognome............................ Nome........................ Matricola...................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova di esame)

6 febbraio 2013 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione C

1] (4 pt.) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie:

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n \log(\beta^2 + n)} \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^n .$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Determinare tutti i numeri complessi z per cui $z^4 = -4$.

Soluzione:

3] (4 pt.) Per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \geq 0, \\[2ex] \dfrac{x - \arctan x}{\sin x \, \log(1 + x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua nel punto $x = 0$? Per quali valori la funzione risulta derivabile in $x = 0$?

Soluzione:

4] (4 pt.) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{x^2}{x + \pi} + |x|, \quad x \in (-\pi, \pi] \right\}.$$

Specificare se si tratta di massimo o minimo.

Soluzione:

5] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = (a^2 - 4)x + (a^2 - 2a)x^2 + (a + 2)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Determinare per quali a la funzione ha un punto critico (stazionario) in $x = 0$, per quali a tale punto critico é di minimo relativo, e per quali a é di massimo relativo.

Soluzione:

6] (4 pt.) Sia

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \geq 100\right\},$$

$$B = \left\{\left(0, -1 + \frac{1}{k}\right) \quad , \quad k \in \mathbb{N}\right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora:

$\overset{\circ}{C}=$ ....

$\partial C =$ ....

$C' =$ ....

7] (6 pt.) Determinare, se esiste,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+3)\log\left(\frac{n+3}{n}\right) - 6 + n^5 e^{-n}}{3^{1/n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Cognome............................ Nome....................... Matricola..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova di esame)

6 febbraio 2013 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione D

1] (4 pt.) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie:

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n \log(|\beta| + n^2)} \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^n .$$

Soluzione:

2] (4 pt.) Determinare tutti i numeri complessi z per cui $z^4 = 16i$.

Soluzione:

3] (4 pt.) Per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} b - ax & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{x - \arctan x}{\big(\log(1+x)\big)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua nel punto $x = 0$? Per quali valori la funzione risulta derivabile in $x = 0$?

Soluzione:

4] (4 pt.) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{x^2}{x+e} + |x|, \quad x \in (-e, \pi] \right\}.$$

Specificare se si tratta di massimo o minimo.

Soluzione:

5] (4 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = (a^2 - 3a + 2)x + (a^2 - 1)x^2 + (a - 2)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Determinare per quali a la funzione ha un punto critico (stazionario) in $x = 0$, per quali a tale punto critico é di minimo relativo, e per quali a é di massimo relativo.

Soluzione:

6] (4 pt.) Sia

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \geq 100\right\},$$

$$B = \left\{\left(2 - \frac{1}{k}, 0\right) \quad , \quad k \in \mathbb{N}\right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora:

$\overset{\circ}{C}=$ ....

$\partial C =$ ....

$C' =$ ....

7] (6 pt.) Determinare, se esiste,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+5)\log\left(\frac{n+5}{n}\right) - 10 + n^3 e^{-n}}{2^{1/n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.