Cognome............................ **Nome**....................... **Matricola**..................

C.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (prova di esame)

10 settembre 2013 proff. M.Salvatori, L. Vesely durata: **90 minuti**

1] (4 pt.) Si considerino l'intervallo $D = [3, +\infty)$ e la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}.$$

$\inf f(D) = \ldots\ldots$, $\sup f(D) = \ldots\ldots$, $\min f(D) = \ldots\ldots$, $\max f(D) = \ldots\ldots$.

2] (4 pt.) Discutere, al variare del parametro reale b, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^b\left(5^{2/n} - 1\right)}{\log(5^n + n^2)}.$$

Soluzione:

3] (3 pt.) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -3 - 2^{-n} < x < -3 + 4^{-n}\right\}, \qquad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n, \qquad B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Gli insiemi E_n sono aperti? ...... Gli insiemi E_n sono limitati? ......

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4] (4 pt.) Siano $z = 1 - i$ e $w = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$. Allora

$$\mathrm{Re}\left(\frac{w}{z}\right) = \ldots\ldots \qquad ; \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{w}{z}\right) = \ldots\ldots$$

In forma trigonometrica, $\dfrac{w}{z} = \ldots\ldots$

5] (4 pt.) Determinare il polinomio di Taylor di grado 2 con centro in $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$$

Si consiglia di calcolare le derivate necessarie

Soluzione:

6] (4 pt.) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax^2 & \text{se } x \leq 0 \\ b + x^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è invertibile su tutto $\mathbb{R}$.
Soluzione:

7] (7 pt.) Calcolare, al variare del parametro reale a,

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} + \sin \frac{a}{\sqrt{n}} \right]^n .$$

Scrivere uno svolgimento completo.