INTEGRALI MULTIPLI (L.V.)

1. Siano $f(x,y) = x^2 + y$, $\mathbf{I} = [-2,1] \times [-1,1]$. Scrivere la somma superiore $S(\mathbf{P}, f)$ e quella inferiore $s(\mathbf{P}, f)$ per la partizione $\mathbf{P} = \{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\}$ dell'intervallo $\mathbf{I}$, dove
$\mathbf{I}_1 = [-1,1] \times [-1,1]$, $\mathbf{I}_2 = [-2,-1] \times [-1,0]$, $\mathbf{I}_3 = [-2,-1] \times [0,1]$ (*fatevi un disegno!*).

2. Disegnare i domini ai quali si estendono i seguenti integrali doppi:

$$\textbf{a)} \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy \qquad \textbf{b)} \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy \qquad \textbf{c)} \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dy$$

3. Cambiare l'ordine di integrazione nei seguenti integrali:

$$\textbf{a)} \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy \qquad \textbf{b)} \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy$$

4. Calcolare $\int_E \sqrt{2a-x}\,dx\,dy$, dove E è il cerchio di raggio $a > 0$ tangente agli assi delle coordinate e situato nel primo quadrante.

5. Passare alle coordinate polari nei seguenti integrali:

$$\textbf{a)} \int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy \qquad \textbf{b)} \int_T f(x,y)\,dx\,dy$$

dove T è il triangolo delimitato dalle rette $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

6. Usando le coordinate polari, calcolare $\int_S y\,dx\,dy$, dove S è l'intersezione del primo quadrante con il cerchio di diametro $a > 0$ centrato nel punto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

7. Calcolare $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$ nei seguenti casi (ricordiamo la definizione della parte positiva di u: $u^+ = \max(u,0)$):

$$\textbf{a)}\ f(x,y) = x\,,\ E = \{(x,y) : (x,y) \in [0,1] \times [-1,1],\ |y| \geq x\}$$
$$\textbf{b)}\ f(x,y) = y\,,\ E = \{(x,y) : y \geq 0,\ 1 - y < x^2 < 4 - y\}$$
$$\textbf{c)}\ f(x,y) = x\,,\ E = \{(x,y) : (2x-2)^+ < |y| < (x)^+\}$$
$$\textbf{d)}\ f(x,y) = xy\,,\ E = \{(x,y) : |x| \leq 1,\ |y| \leq |1 - x^2|\}$$

8. Calcolare i volumi degli insiemi descritti dai seguenti sistemi di equazioni:

a) $|x| \le 1, \ |x-y| \le 1, \ 0 \le x+z \le 1;$
b) $x^2+y^2 < 1, \ x^2+z^2 < 1;$
c) $0 \le z \le 1, \ 0 \le \min(x,y) \le \max(x,y) \le z;$

9. Sia $E = \{(x,y,z) : a \le x \le b, \ u(x) \le y \le v(x), \ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$, dove $u, v \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $\alpha, \beta \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue tali che $u \le v$, $\alpha \le \beta$. Mostrare che l'insieme E è limitato; assegnata quindi la generica funzione continua $f \colon E \to \mathbf{R}$, effettuare la riduzione dell'integrale triplo $\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ a tre integrali successivi in una variabile scalare.

10. Calcolare $\int_E xy\,dx\,dy$ dove $E = \{(x,y) : |2x+y| < 1, \ 0 < x-y < 2\}$.

11. Calcolare la misura dell'insieme $E = \{(x,y,z) : x > 0, \ x^2+y^2 < 1, \ 0 < z < x\}$.

12. Calcolare $\int_E z^2\,dx\,dy\,dz$ dove $E = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2, \ z > 0, \ z^2 > x^2+y^2\}$.

13. Sia $D = \{(x,y) : \sqrt{x}+\sqrt{|y|} \le 1\}$. Doppo aver rappresentato graficamente D, calcolare il volume dei solidi U, V, Z essendo

- U ottenuto ruotando D attorno all'asse "x";
- V ottenuto ruotando D attorno all'asse "y";
- $Z = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \ |z| \le \max(x,|y|)\}$.

14. Calcolare la misura dell'insieme
$$E = \{(x,y,z) : \min(x,y) > 0, \ x^2+y^2 < 2, \ y \ge x^2, \ 0 < z < \max(x,y)\}.$$