Analisi Matematica 1 (Fisica)

Un breve svolgimento della prova scritta dell' 8 luglio 2013

---

1. (4 pt.) *Siano*

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}, \qquad I = \big(\frac{1}{2}, +\infty\big).$$

Determinare $f(I)$.

Soluzione.
Qualcosa si può vedere subito: f è definita e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; siccome f è continua e non negativa su I e $f(1) = 0$, abbiamo $\min f(I) = 0$ e $f(I)$ è un intervallo (teorema di Darboux). Per determinare l'andamento del grafico di f, possiamo –ad esempio– osservare che f è il valor assoluto della funzione $g(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Studiando g e tracciando poi un grafico qualitativo di f su I, si ottiene facilmente che f è decrescente in $(\frac{1}{2}, 1]$ e in $[2, +\infty)$, ed è crescente in $[1, 2]$ *(fatevi un disegno!)*. Confrontando $f(\frac{1}{2}) = 2$ con $f(2) = \frac{1}{4}$, si deduce che $\sup f(I) = 2$, ma non è un massimo.

Conclusione: $f(I) = [0, 2)$.

---

2. (4 pt.) *Discutere, al variare del parametro reale* b*, la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{b^2}.$$

Soluzione.
Dalla teoria (definizione del numero e), sappiamo che $(1+\frac{1}{n})^n$ tende ad e per difetto, quindi la nostra serie è a termini positivi. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Abbiamo

$$x_n := e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})} = e\left[1 - e^{n\log(1+\frac{1}{n})-1}\right].$$

Nella parentesi quadra, l'esponente di e è un infinitesimo *(sapete perché?)*, perciò

$$x_n \sim e\left[1 - n\log(1+\tfrac{1}{n})\right] = \cdots = \tfrac{e}{2n} + o(\tfrac{1}{n}) \sim \tfrac{e}{2n}.$$

(N.B. che, anche se non avessimo osservato che $x_n > 0$ per ogni n, da questa formula avremmo dedotto che $x_n > 0$ almeno definitivamente.)
Quindi il termine generale della nostra serie è asintotico a

$$\frac{c}{n^{b^2}}$$

dove $c = (e/2)^{b^2}$ è una costante. Quindi, la nostra serie converge se e solo se $b^2 > 1$, cioè, $b \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

---

3. (3 pt.) *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *siano*

$$E_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \right\}, \qquad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \qquad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Gli insiemi E_n *sono aperti?* *Gli insiemi* E_n *sono limitati?* $A = \ldots$ $B = \ldots$.

Soluzione.
Fissato n, l'insieme E_n coincide con il "sottografico" (cioè, la regione del piano tra il grafico e l'asse delle x) della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ristretta all'intervallo $[n, +\infty)$, da cui sono stati tolti il grafico di f e l'asse x. Ovviamente, tale insieme non è limitato. Inoltre, visto che esso contiene anche i punti del segmento verticale $\{n\} \times (0, \frac{1}{n})$, esso non è aperto.

Ora, siccome $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, abbiamo

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E_1 \,.$$

Inoltre, un punto appartenente a tutti gli E_n dovrebbe avere l'ascissa maggiore o uguale a tutti i numeri naturali; quindi

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \emptyset \,.$$

---

4. (4 pt.) *Determinare in forma algebrica tutti i numeri complessi* z *tali che*

$$(i + \sqrt{3})^3 = (z + i)^3 \,.$$

Soluzione.
Per semplicità, denotiamo $w = z + i$. Per w abbiamo quindi l'equazione

$$w^3 = (\sqrt{3} + i)^3,$$

cioè, w è una delle (tre) radici cubiche del numero complesso $(\sqrt{3} + i)^3$. Ovviamente, una delle soluzioni è $w = \sqrt{3} + i$; inoltre, le altre due soluzioni giacciono sulla circonferenza (centrata nell'origine) di raggio $|\sqrt{3} + i| = 2$ e formano con la prima nostra soluzione i vertici di un triangolo equilatero. Siccome

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 2 \exp(i\pi/6) \,,$$

le altre due soluzioni w sono

$$2 \exp\left(i\frac{\pi}{6} + ik\frac{2\pi}{3} \right) \qquad \text{con } k = 1, 2 \,,$$

cioè,

$$w = -\sqrt{3} + i \qquad \text{e} \qquad w = -2i \,.$$

(Ci si poteva arrivare anche solo graficamente.)
Ritornando all'incongita z, otteniamo la risposta finale:

$$z \in \left\{ \sqrt{3}\,,\ -\sqrt{3}\,,\ -3i \right\}.$$

---

5. (4 pt.) *Scrivere il* <u>*polinomio*</u> *di Taylor di grado 3 con centro in* $x_0 = 0$ *della funzione*

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} e^x\right).$$

Soluzione.
Abbiamo $f(x) = \cos\Big[\frac{\pi}{2}\big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\big)\Big]$. Si noti che l'argomento del coseno <u>non</u> è un infinitesimo per $x \to 0$. Siccome $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin\left[\tfrac{\pi x}{2} + \tfrac{\pi x^2}{4} + \tfrac{\pi x^3}{12} + o(x^3)\right] \\ &= -[\cdots] + \tfrac{1}{6}[\cdots]^3 + o(x^3) = \cdots = \\ &= -\tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{\pi}{4}x^2 + \left(\tfrac{\pi^3}{48} - \tfrac{\pi}{12}\right)x^3 + o(x^3)\,. \end{aligned}$$

Risposta:

$$P_3(x) = -\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}x^2 + \left(\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{12}\right)x^3\,.$$

---

6. (4 pt.) *Determinare tutti gli asintoti della funzione*

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}\, e^{1/x}.$$

Soluzione.
La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1\,,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 e^{1/x} - x^2 + 3x}{x-3} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\big(1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})\big) - x^2 + 3x}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x + o(x)}{x} = 4\,. \end{aligned}$$

Concludiamo che vi sono tre asintoti (due verticali e uno obliquo):

$$x = 0, \quad x = 3, \quad y = x + 4.$$

---

7. (7 pt.) *Calcolare, al variare del parametro reale a,*

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \left[1 + \frac{a-12}{2n^2} - \cos\log\left(\frac{3}{n} + 1\right)\right].$$

Scrivere uno svolgimento completo!

Soluzione.
Siccome

$$\begin{aligned}\cos\big[\log(1 + \tfrac{3}{n})\big] &= \cos\left[\tfrac{3}{n} - \tfrac{9}{2n^2} + \tfrac{9}{n^3} + o(\tfrac{1}{n^3})\right] \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}[\cdots]^2 + o(\tfrac{1}{n^3}) = 1 - \tfrac{9}{2n^2} + \tfrac{27}{2n^3} + o(\tfrac{1}{n^3}),\end{aligned}$$

il termine generale x_n della successione di cui si vuole calcolare il limite soddisfa

$$x_n = n^a \left[\frac{a-3}{2n^2} - \frac{27}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$

Se $a \neq 3$, allora

$$x_n \sim \frac{a-3}{2}\, n^{a-2}.$$

Se invece $a = 3$, abbiamo

$$x_n = -\frac{27}{2} + o(1).$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 2; \\ -\frac{1}{2} & \text{se } a = 2; \\ -\infty & \text{se } 2 < a < 3; \\ -\frac{27}{2} & \text{se } a = 3; \\ +\infty & \text{se } a > 3. \end{cases}$$
