REGISTRO DELLE ESERCITAZIONI
DI ANALISI 1 (Fisica)
corso della prof.ssa M. Salvatori, 2012–2013

10/10/2012 [2 ore: 1,2]

Simbolo di sommatoria

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{i+1}$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} ta_i = t\sum_{i=1}^{n} a_i$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n+1} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=3}^{n+3} a_i = a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3}$
- Sapendo che $\sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$, calcolare
$$\sum_{i=1-n}^{3n-2} b_i \ .$$
- Sapendo che $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, calcolare
$$\sum_{n=1}^{m}(2n-1) \ .$$
- Consideriamo una tabella reale di numeri reali, avente m righe e n colonne (cioè, una *matrice* reale di tipo $m \times n$). Denotando con a_{ij} il numero che si trova nella i-esima riga e nella j-esima colonna, la somma di tutti i numeri contenuti nella nostra matrice può essere calcolata in vari modi, ad esempio, sommando prima i numeri di ogni riga e sommando poi insieme tutte queste somme, oppure sommando prima per colonne e poi sommare tali somme. In formule,
$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \ .$$

Induzione matematica

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- **Esercizio per voi.** Dimostrare che la somma dei primi n quadrati perfetti vale $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calcolare poi la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

- *Disuguaglianza di Bernoulli.*
  (a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x > -1$ si ha $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
  (b) Mostrare che l'uguaglianza vale se e solo se $n = 1$ oppure $x = 1$.

- **Esercizio per voi.** Dimostrare la seguente *disuguaglianza generale di Bernoulli*:
  per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x_1, \ldots, x_n \in (-1, +\infty)$ tali che $x_i x_j \geq 0$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, si ha

  $$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

  cioè, $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$.

- Per $n \in \mathbb{N}$, confrontare 2^n con n^2.
  (Risposta: $2^n < n$ per $n = 3$; $2^n = n^2$ per $n \in \{2, 4\}$; $2^n > n^2$ per $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4\}$.)

- **Esercizio per voi.** Trovare <u>un</u> $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, si abbia

  $$\left(\sqrt{3}\right)^n > n^2 .$$

Disequazioni

- $\sqrt{4 - x} - x - 2 > 0$

- **Per voi:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x} &\le 0 && \text{(nessuna soluzione)}\\
\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}-\sqrt{9-3x} &\le 0 && (x\in[-\tfrac{1}{2},0])\\
\frac{3^{2x}-3^{x+1}+2}{3^x-3} &\le 0 && (x\in(-\infty,0]\cup[\log_3 2,1))\\
\frac{\sqrt{|1-\ln x|-1}}{4-\ln x}+1 &< 0 && (x\in(e^4,e^7))
\end{aligned}$$

17/10/2012 [2 ore: 3,4]

Massimo/minimo, estremo superiore/inferiore

- $A=(0,\sqrt{2}\,],\ \ B=(0,\sqrt{2}\,]\cap\mathbb{Q}$
- $C=\left\{\sqrt{n}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}:n\in\mathbb{N}\right\},\quad D=\left\{\dfrac{5-x^2}{5+x^2}:x\in\mathbb{R}\right\}$
- *Definizione.* Dati due insiemi $U,V\subseteq\mathbb{R}$, definiamo la loro *somma algebrica* e il loro *prodotto algebrico* come segue: $U+V=\{u+v:u\in U,v\in V\},\quad U\cdot V=\{uv:u\in U,v\in V\}$.
- $E=[-4,1)+(-2,2],\ \ F=[-4,1)\cdot(-2,2]$
- $G=\left\{\dfrac{4-3(-1)^n}{n^{(-1)^n}-3(-1)^n}:n\in\mathbb{N}\right\}$
- **Esercizi per voi.**
  $H=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ dove $x_n=\begin{cases}\frac{k}{k+1} & \text{se } n=3k \text{ con } k\in\mathbb{N},\\ -\frac{n+1}{n} & \text{altrimenti.}\end{cases}$
  $K=\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{x+3}>x+1\}$.

Grafici deducibili da grafici noti

- $f(x)=2+\arctan x,\ \ g(x)=\arctan(x+2)$
- $f(x)=3\sin x,\ \ g(x)=\sin(3x),\ \ h(x)=-3\sin(x/3)$
- $f(x)=\sqrt{-x}\,,\ \ g(x)=-\sqrt{x}$

- $f(x) = |2^x - 1|, \;\; g(x) = 2^{|x|} - 1, \;\; h(x) = 2^{|x-1|}, \;\; k(x) = 2^{|x|-1}$
- $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^4}\,, \quad g(x) = -\big|f(-x) - 1\big|$
- **Esercizio per voi.** $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}\,, \quad g(x) = -\,|f(|x|) - 1|$

24/10/2012 [2 ore: 5,6]

- Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora
$$\sqrt{n} \begin{cases} \in \mathbb{N} & \text{se } n = k^2 \text{ con } k \in \mathbb{N}; \\ \notin \mathbb{Q} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
- **Esercizio per voi.** Formulate e dimostrate un'affermazione analoga per le radici k-esime ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).
- Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora
$$\log_{10} n \begin{cases} = 0 & \text{se } n = 1; \\ \in \mathbb{N} & \text{se } n = 10^k \text{ con } k \in \mathbb{N}; \\ \notin \mathbb{Q} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
- Dimostrare che la retta di equazione $y = x\sqrt{2} - \sqrt{3}$ non interseca $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
- Date le funzioni
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ 4-2x & \text{se } x > 1 \end{cases},$$
rappresentare graficamente le funzioni
$$f(|x|), \quad |g(-x)|, \quad (g \circ f)(x), \quad (f \circ g)(x).$$
- **Esercizio per voi.** Consideriamo due funzioni $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come segue.
Su $(-\infty, 0)$, $f \equiv -1$; su $[0, +\infty)$, il grafico di f è la semiretta dal punto $(0,-1)$ attraverso il punto $(1,0)$.
Su $(-\infty, 0]$, il grafico di g è la semiretta da $(0,-2)$ attraverso $(-1,0)$; su $(0,+\infty)$, $g \equiv -2$.
Determinare e rappresentare graficamente le funzioni composte

$f \circ g$, $g \circ f$.
Dovrebbe venire:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -3 - 2x & \text{se } x < -1 \\ -1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}, \quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ -2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

- Determinare il più ampio intervallo contenente 0 dove la funzione
$$f(x) = \begin{cases} -|x+5| & \text{se } x < -1 \\ x - 1 & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{1+x} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$
è invertibile *(cioè, iniettiva)*.

- E' possibile scrivere l'intervallo $I = (-2, 1]$ come:
  (i) unione di intervalli aperti? *[No: I non è aperto!]*
  (ii) intersezione di intervalli aperti? *[Sì.]*
  (iii) unione di intervalli chiusi? *[Sì.]*
  (iv) intersezione di intervalli chiusi? *[No.]*

- Sia $a > 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, sia $I_n = \{x \in \mathbb{R} : x^n < 5a^n\}$. Determinare gli insiemi $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$.

- Consideramo due funzioni $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ e la funzione composta $h = g \circ f$. Supponiamo che h sia iniettiva. Possiamo concludere che:
  (i) f è iniettiva? *[Sì.]*
  (ii) g è iniettiva? *[No.]*

31/10/2012 [2 ore: 7,8]

- Definizione di limite di una successione in uno spazio metrico.

- Siano (X, d) uno spazio metrico, $\{x_n\} \subset X$, $a \in X$, $x_n \to a$, $A \subset X$ insieme aperto, $C \subset X$ insieme chiuso.
  (i) Se $a \in A$ allora $x_n \in A$ definitivamente. (Il vice versa è falso.)
  (ii) Se $x_n \in C$ definitivamente allora $a \in C$. (Il vice versa è falso.)

- *Corollario – permanenza del segno.* Supponiamo che $x_n \to a$ in $\mathbb{R}$.
  (i) Se $a > 0$ allora $x_n > 0$ definitivamente.
  (ii) Se $x_n \geq 0$ definitivamente allora $a \geq 0$.

- $$x_n = \frac{3^n - 2^{2n}}{3^n + 2^n}\,, \qquad y_n = \frac{n^{1/2} - n^2 + n^a}{n^{2a} + n} \quad (a \in \mathbb{R})$$

- Sia $(0, +\infty) \ni x_n \to a \in (0, +\infty)$. Dimostrare che $\log x_n \to \log a$.

- Siano $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}$ tali che $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata. Allora $x_n y_n \to 0$.

- $$x_n = \frac{(n+1)2^{\sin n}\mathrm{arctg}(1 - \sqrt{n}\,)}{n^2 - 3}$$

- *Limiti notevoli collegati al numero e.* In quanto segue, $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varepsilon_n \to 0$.
  (i) $(1 + \frac{1}{n})^n \nearrow e \swarrow (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
  (ii) $(1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \to e, \quad (1 + a\varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \to e^a \ (a \in \mathbb{R})$
  (iii) $\dfrac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1\,, \quad \dfrac{\log_b(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to \dfrac{1}{\log b} \quad (1 \neq b > 0)$
  (iv) Se $u_n \to 1$ allora $\frac{\log u_n}{u_n - 1} \to 1$.
  (v) $\dfrac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \to 1\,, \quad \dfrac{a^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \to \log a \quad (a \in \mathbb{R})$
  (vi) $\dfrac{(1 + \varepsilon_n)^a - 1}{\varepsilon_n} \to a \quad (a \in \mathbb{R})$

- $$x_n = \frac{\log \frac{n+1}{n-2}}{n - \sqrt{n}}\,, \qquad y_n = (n - \sqrt{n}\,) \log \frac{n+1}{n-2}$$

- $$x_n = n\left(a^{\frac{n-1}{n^2+1}} - 1\right) \quad (a \in \mathbb{R})$$

- $x_n = \sqrt[6]{n - \sqrt{n}} - \sqrt[6]{n}$

07/11/2012 [2 ore: 9,10]

- $A = [-2, -1) \cup \{-2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$. Determinare A°, $\overline{A}$, ∂A, A'.

- $A = \big([0,1) \cap \mathbb{Q}\big) \cup [1,2] \cup \{4\}$. Idem.

- $A = \big\{(\sin \frac{n\pi}{2}, 1 - 1 - \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 :\ m, n \in \mathbb{N}\big\}$. Idem.

- Sia $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato. Vero o falso?:
  (i) $\inf E \in E'$. *[F]*
  (ii) $\inf E \in \partial E$. *[V]*
  (iii) Se E non ha punti isolati e $E^\circ \neq \emptyset$, allora $\overline{(E^\circ)} = \overline{E}$. *[F]*
  (iv) Se E è aperto, allora ogni punto di ∂E è isolato. *[F]*

- Sia X l'insieme delle persone presenti in quest'aula. Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, per $x, y \in X$ definiamo

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ a & \text{se } x \neq y \text{ e } x, y \text{ sono di stesso sesso,} \\ b & \text{se } x, y \text{ sono di sesso opposto.} \end{cases}$$

  Quando d è una metrica su X?
  [Risposta: $0 < a \leq 2b$.]

- Consideriamo su $\mathbb{R}^2$ le seguenti due metriche:
  (a) la metrica euclidea d;
  (b) la metrica ρ data da

$$\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{se } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

  (Si noti che: la ρ-distanza di due punti su una stessa linea verticale coincide con quella euclidea, mentre per due punti non uno sopra l'altro, la loro distanza è la lunghezza del percorso dal primo punto ortogonalmente sull'asse x, poi orizzontalmente sull'asse x fino al livello del secondo punto e infine dall'asse x verticalmente al secondo punto. È una metrica del tipo "Valle D'Aosta".)
  (i) Disegnare le bolle aperte nello spazio metrico $(\mathbb{R}^2, \rho)$.
  (ii) Per ciascuna delle due metriche d, ρ, determinare E°, $\overline{E}$, ∂E, E' dove

$$E = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big(\{\tfrac{1}{n}\} \times [0,1]\big).$$

- Ripasso delle proprietà di "$\sim$" ("asintotico"). In particolare, se $a_n \sim b_n$ e $\bar{a}_n \sim \bar{b}_n$ allora:

(i) $\{a_n\}, \{b_n\}$ sono definitivamente non nulle e hanno definitivamente lo stesso segno;
(ii) $\{a_n\}, \{b_n\}$ hanno lo stesso comportamento;
(iii) $(a_n)^p \sim (b_n)^p$ per ogni $p \in \mathbb{R}$;
(iv) $a_n\bar{a}_n \sim b_n\bar{b}_n$ e $\frac{a_n}{\bar{a}_n} \sim \frac{a_n}{\bar{a}_n}$;
(v) se $(\lim_{n\to+\infty} a_n) \in \{0^+, +\infty\}$ allora $\log a_n \sim \log b_n$;
(vi) $(a_n + \bar{a}_n) \sim (b_n + \bar{b}_n)$ **può essere falso**;
(vii) $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ **può essere falso**.

- $x_n = n^2\left(\sqrt[4]{\dfrac{n^2-1}{n^2+2}} - 1\right)$
- $y_n = \left(\dfrac{n+2n^{-1}}{n+2}\right)^{2n^2}$
- $z_n = \dfrac{1+\cos\left(\pi\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}\right)}{\log^2\left(\cos\frac{1}{n}\right)}$

14/11/2012 [2 ore: 11,12]

- *Ripasso: gerarchia degli infiniti.* Useremo le seguenti notazioni:
  - $[t] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq t\}$ (la parte intera di t);
  - $a_n << b_n$ significa che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

  Siano $1 \neq b > 0$, $a > 0$, $B > 1$. Allora per ogni successione $\{x_n\} \subset (0, +\infty)$ tale che $x_n \to +\infty$ si ha
  $$\log_b x_n << (x_n)^a << B^{x_n} << [x_n]! << (x_n)^{x_n}\,.$$
- $x_n = a^n\left[(2^n+3^n)^{1/n} - 3\right] \qquad (a \in \mathbb{R})$
- $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$
- $x_n = \dfrac{3+(-1)^n\pi}{\sqrt{n+\log n}-\sqrt{n-\log n}}$,

  $y_n = \dfrac{n^a}{\sqrt[7]{n+\log n}-\sqrt[7]{n-\log n}} \qquad (a \in \mathbb{R})$
- $x_n = n\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|, \qquad y_n = n\left|\sin\dfrac{n\pi}{3}\right|$

- $x_n = n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$
  [si usa la formula: $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ per ogni $x > 0$]

- $x_n = \dfrac{e^{n^a} - 1}{n^{a^2-1}} \qquad (a \in \mathbb{R})$

- $x_n = \dfrac{(5n)^n - 50^n - n^4 e^{3n}}{ne^{2n} + n^{n+\log n} + 3^3}$

- $x_n = a^n \cdot \dfrac{(-3)^n \log(2^n + 1) - 2^n n^6}{3^{n/2} \log(n^2 + 1) + 5n} \qquad (a \in \mathbb{R})$

21/11/2012 [2 ore: 13,14]

- *Breve ripasso sulle* **serie numeriche** – definizioni, proprietà, criteri, serie notevoli.

- $\displaystyle\sum^{+\infty} (\log n) \cdot \sqrt[4]{\frac{n^7 + 10}{n^{10} + 7n}}$

- $\displaystyle\sum^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt{n^3 - n - 1} - \sqrt{n^3 + n + 1}\right)$

- $\displaystyle\sum^{+\infty} \frac{3^n}{n^3}, \qquad \sum^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$

- $\displaystyle\sum^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

- $\displaystyle\sum^{+\infty} \left|(n+1)^a - n^a\right|^b \cdot \log\frac{n-1}{n+1} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

- $\displaystyle\sum^{+\infty} \frac{1}{n^{1+(1/n)}}$

- $\displaystyle\sum^{+\infty} \frac{1}{n\, 2^{\log n}}$

- $\displaystyle\sum^{+\infty} \frac{1}{n\, 2^{\sqrt{\log n}}}$
  (Per il criterio di condensazione, la serie converge se e solo se converge la serie $\sum 2^k a_{2^k} = \sum \frac{1}{2^{\sqrt{k \log 2}}}$. Il termine generale di quest'ultima serie può essere maggiorato con $\frac{c}{k^2}$, dove c è un'opportuna costante.)

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$
  (Il termine generale non tende a zero, quindi la serie non converge. Diverge o oscilla? Per rispondere a ciò, bisogna "guardare bene" le somme parziali...)

27/11/2012 [2 ore: 15,16]

Abbiamo studiato la convergenza di diverse serie, prese quasi a caso da varie fonti. Le seguenti sono quelle che mi ricordo...

- $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

- $\displaystyle\sum_{n=10}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+3}{2x+5}\right)^n \frac{1}{\log n}\,, \qquad \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{y^n}{\log n}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin^2 n - 1}{3n^2 + (-1)^n}$

- $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-5)^n}{4^n \sqrt[3]{1+n^2}}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \sin\big[(2^n+3^n)^{1/n}-3\big]$
- **Attenzione:**
  $a_n \sim b_n \searrow 0$ **non** implica la convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ **!**
  (Vedremo un esempio la prossima volta.)
- **Limiti di funzioni** – ripasso delle definizioni. Abbiamo ripassato le definizioni di:
  $$\lim_{x\to a^+} f(x) = b\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = c^-\,, \qquad \lim_{x\to d} f(x) = +\infty\,.$$
- $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \tan(2x)\cdot\tan(\tfrac{\pi}{4}-x)$
  [Metodo di base: sostituzione $t = x - \frac{\pi}{4}$.]

5/12/2012 [2 ore: 17,18]

- *Esempio.* La serie
  $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$
  (i) è del tipo $\sum(-1)^n b_n$ con $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$;
  (ii) ma essa diverge a $+\infty$ in quanto somma di due serie di cui una convergente e l'altra divergente a $+\infty$.
- **Problemino per voi.** Studiate la convergenza della serie
  $$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}\ .$$
- Alcune proprietà di "o piccolo" (v. il relativo file).
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} \qquad (m,n\in\mathbb{N})$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} \qquad (n\in\mathbb{N})$

- Calcolare i limiti della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x^4}$ per: (a) $x \to 0$; (b) $x \to 1$; (c) $x \to -1$; (d) $x \to 2$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{\log(1+x^2)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to \pi/6} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \log(1+2^x) \cdot \log(1+\tfrac{3}{x})$

12/12/2012 [2 ore: 19,20]

- *Asintoti all'infinito.* Per una funzione f definita in un intorno di $+\infty$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) la retta $y = mx+q$ è asintoto al grafico di f per $x \to +\infty$, cioè,
  $$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0\,;$$
  (ii)
  $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\,, \qquad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]\,.$$
  E analogamente per $x \to -\infty$. Se $m \neq 0$ parliamo di *asintoto obliquo.*
- Asintoto per $x \to -\infty$: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.
- **Esercizio per voi.** Asintoto per $x \to +\infty$: $f(x) = \dfrac{(\log x)^x}{x^{\log x}}$.
- Derivare: $f(x) = \sin(\log x^3)$, $g(x) = \sin^3(\log x)$.
- Retta tangente in $x_0 = \frac{\pi}{2}$: $f(x) = (\sin x)^{1+\cos x}$.

- Sia f una funzione derivabile in un intervallo simmetrico I. Allora:
  - f è pari $\Rightarrow f'$ è dispari;
  - f è dispari $\Rightarrow f'$ è pari.

  <u>*Commento.*</u>
  Siccome ogni funzione dispari in I soddisfa $f(0) = 0$, dalle due implicazioni possiamo dedurre:
  se f è pari allora $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k dispari, e quindi lo sviluppo di McLaurin (cioè, lo sviluppo di Taylor centrato in 0) *di f contiene solo potenze pari.*
  E analogamente, *se f è dispari allora il suo sviluppo di McLaurin contiene solo potenze dispari.*

- **Esercizio per voi.** Nelle due implicazioni dell'esercizio precedente, valgono anche le implicazioni inverse? (Suggerimento: una vale, una no.)

- Studiare la derivabilità:

$$f(x) = |x^2 - 1|\,, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \qquad h(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{se } x \neq 0; \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero delle soluzioni di:

$$x = a \log x\,.$$

- Dimostrare: $(\cos x)^a < \cos(ax)$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in (0, 1)$.

- Dimostrare: $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ per ogni $x > 0$.

- **Esercizio per voi.** Dimostrare:
  $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

19/12/2012 [2 ore: 21,22]

- *Ripasso* – la “legge del trascuramento”: $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$.

- Mentre $\lim_{x\to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$ (per la definizione di "o piccolo"), non possiamo dire niente del limite
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{o(f(x))};$$
esso potrebbe valere $+\infty$ o $-\infty$ oppure potrebbe non esistere. In una situazione concreta, bisogna avere delle informazioni più precise sulla funzione nel denominatore.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\log(1-2x)}{5^x - 3^{2x}}$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\mathrm{Ch}(x^2))}{e^{-2x^2}-\cos(2x)}$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\log^3(1+x)}{\log^2(1+x)-\log(1+x^2)+\log(1+x^3)}$

- $f(x) = \dfrac{\mathrm{Sh}(x^2)}{\cos(x^3)}$. Calcolare $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.
(N.B. che, essendo f pari, si ha necessariamente $f^{(9)}(0) = 0$ e lo sviluppo di McLaurin di f è del tipo $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_8x^8 + o(x^8)$. Inoltre, $f^{(8)}(0) = 8!\, a_8$.)

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1}-2\sqrt[3]{n}\right)\log(n^2+1)$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right]$

- $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\arcsin x+\arccos x-2\arctan(2x)+2x-1}{(2x-1)^k\,\log^3(x+\frac{1}{2})} \qquad (k\in\mathbb{N})$
(Prima di tutto, il denominatore è asintotico a $2^k(x-\frac{1}{2})^{k+3}$. Per quanto riguarda il numeratore $N(x)$, la somma dei primi due addendi è costante, e quindi $N(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(2x) + 2x - 1$. Calcolando $N(\frac{1}{2}), N'(\frac{1}{2}), N''(\frac{1}{2})$, si ottiene lo sviluppo di Taylor di $N(x)$, centrato in $\frac{1}{2}$: $N(x) = 2(x-\frac{1}{2})^2 + o((x-\frac{1}{2})^2) \sim 2(x-\frac{1}{2})^2$. L'esistenza del nostro limite dipende dalla parità di k.)

- **Esercizio per voi.** Determinare tutte le terne $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tali che il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-x}\log(1+x) - x(ax^2+bx+c)}{x\,(1-e^{-x^2})\,\sin x}$$
esista finito.

09/01/2013 [2 ore: 23,24]

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6}}$
[$-1/6$]

- Al variare di $c \in \mathbb{R}$, stabilire se 0 è un estremante per
$$f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + cx^4\,,$$
e di che tipo.
[minimo relativo se $c \geq \frac{1}{12}$; massimo relativo se $c < \frac{1}{12}$]

- Dato che, per la definizione di asintoto, la retta $y = mx + q$ è asintoto al grafico di f per $x \to +\infty$ [$-\infty$] se e solo se $f(x) = mx + q + o(1)$ per $x \to +\infty$ [$-\infty$], in alcuni casi può essere comodo utilizzare gli sviluppi di Taylor nella ricerca di asintoti. Esempi fatti:
  (i) $f(x) = (2x^2+x)\sin(1/x) - \frac{x^2}{x+1}$, asintoto per $x \to +\infty$;
  (ii) $f(x) = \sqrt[4]{x^4-3x^2} - \sqrt{4x^2-x}$, asintoto per $x \to -\infty$.

- *(a richiesta)* Scrivere il numero complesso $z = \frac{1+i}{i-1}$ in forma algebrica e in quella trigonometrica.

- *(a richiesta)* $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4e^x - x^3\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{x^2+3x\log^2|x|}$

- Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right)\cos x & \text{per } x > 0, \\ a\sin x + b\cos x & \text{per } x \leq 0, \end{cases}$$
è derivabile (su $\mathbb{R}$)?
[$b = 0, a = \frac{1}{2}$]

- Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\log\left(\frac{\log(x-1)}{x-2}\right)}{x-2}$.
  (i) Determinare l'insieme di definizione di f.
  (ii) Dimostrare che f è prolungabile con continuità in 2.
  (iii) Tale prolungamento è derivabile in 2 ?