Il duale di $C(K)$ (L.V.)

Descriveremo in che modo i funzionali lineari continui su $C(K)$ possono essere rappresentati come funzionali integrali. Nel presente testo, la parola "compatto" significa "compatto di Hausdorff".

1. Misure (non negative) di Radon

Siano K uno spazio topologico compatto e $\mathcal{B}$ la σ-algebra dei suoi sottoinsiemi boreliani (ciè, la più piccola σ-algebra contenente tutti gli aperti). Una misura (non negativa) μ si dice *misura di Radon* su K se

a) μ è boreliana (cioè, definita su $\mathcal{B}$),
b) μ è finita (cioè, $\mu(K) < +\infty$),
c) μ è regolare, cioè, per ogni $B \in \mathcal{B}$
$\mu(B) = \sup\{\mu(C) : \; C \subset B, \; C \text{ compatto}\}$ e
$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : \; A \supset B, \; A \text{ aperto}\}$.

Denotiamo

$$\mathcal{M}^1(K) = \{\mu : \; \mu \text{ è una misura di Radon su } K \text{ con } \mu(K) = 1\}.$$

Gli elementi di $\mathcal{M}^1(K)$ vengono chiamati *misure probabilistiche di Radon.*

2. Misure con segno

Misura con segno su K è una funzione $\mu \colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e μ sia σ-additiva.

Per ogni misura con segno μ, è possibile definire due funzioni non negative μ^+, μ^- su $\mathcal{B}$ con le formule

$$\mu^+(B) = \sup\{\mu(E) : \; E \subset B, \; E \in \mathcal{B}\},$$
$$\mu^-(B) = \sup\{-\mu(E) : \; E \subset B, \; E \in \mathcal{B}\} \quad (B \in \mathcal{B}).$$

Allora μ^+ e μ^- sono due misure boreliane su K tali che $\mu = \mu^+ - \mu^-$. La misura

$$|\mu| := \mu^+ + \mu^-$$

viene chiamata *variazione totale* della misura con segno μ. (Ovviamente, se $\mu \geq 0$, allora $\mu = \mu^+ = |\mu|$.)

È possibile dimostrare che, per ogni $B \in \mathcal{B}$,

$$|\mu|(B) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)| : B = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \; E_k \in \mathcal{B}, \; E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j\Big\}.$$

(Quest'ultima formula può essere utilizzata per definire la variazione totale di una misura a valori complessi.)

Chiamiamo *misura di Radon con segno* una misura con segno μ tale che μ^+ e μ^- sono misure di Radon. (*Misura di Radon a valori complessi* è una misura complessa μ tale che $\mathrm{Re}(\mu)$ e $\mathrm{Im}(\mu)$ sono misure di Radon con segno.)

Lemma 2.1. *Sia $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ (o $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$) una misura. Allora sono equivalenti:*

(i) *μ è una misura di Radon con segno (o complessa);*
(ii) *$|\mu|$ è una misura di Radon;*
(iii) *$|\mu|(B) = \sup\{|\mu|(C) :\ C \subset B,\ C$ compatto$\}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$.*

Denotiamo

$$\mathcal{M}(K) := \{\mu :\ \mu \text{ è una misura di Radon con segno su } K\}.$$

Allora $\mathcal{M}(K)$ è uno spazio vettoriale e, con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(K),$$

$\mathcal{M}(K)$ è uno spazio di Banach. (Lo stesso vale anche nel caso complesso.)

3. Il duale di $C(K)$

Theorem 3.1 (Riesz)**.** *Siano K uno spazio compatto (di Hausdorff) e $C(K)$ lo spazio delle funzioni continue (reali o complesse) su K con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Allora*

- *la relazione*

$$x^*(u) = \int_K u\, d\mu \quad \textit{per ogni } u \in C(K)$$

definisce una corrispondenza biunivoca fra i funzionali $x^* \in C(K)^*$ e le misure $\mu \in \mathcal{M}(K)$;
- *questa corrispondenza è una isometria (cioè, $\|x^*\|_{X^*} = \|\mu\|_{\mathcal{M}(K)}$ se μ è la misura associata a x^*);*
- *(nel caso reale) se μ è la misura associata a x^*, allora: $\mu \geq 0$ se e solo se il funzionale x^* è non negativo nel senso che $x^*(u) \geq 0$ per ogni $u \in C(K)$ con $u \geq 0$.*

4. Il duale di $C[a,b]$ – una rappresentazione alternativa

Ricordiamo prima alcuni fatti base sulle funzioni a variazione limitata e sull'integrale di Stieltjes.

Chiamiamo variazione della funzione u sull'intervallo $[a,b]$ il valore

$$\mathrm{Var}(u;[a,b]) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|\right\}$$

dove l'estremo superiore si prende al variare di tutte le partizioni $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$.

Proposition 4.1. $\mathrm{Var}(u; [a, b]) < +\infty$ *se e solo se la funzione* u *può essere scritta come differenza di due funzioni monotone non decrescenti su* $[a, b]$*.*

Sia φ una funzione reale su $[a, b]$. Se $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona non decrescente e P è una partizione di $[a, b]$, possiamo definire (analogamente al caso di integrale d Riemann) la somma superiore e la somma inferiore:

$$S_u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} M_i\big(u(t_i) - u(t_{i-1})\big), \qquad s_u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} m_i\big(u(t_i) - u(t_{i-1})\big)$$

dove $M_i = \sup \varphi([t_i, t_{i_1}])$, $m_i = \inf \varphi([t_i, t_{i_1}])$. Quindi, possiamo definire l'integrale di Stieltjes

$$\int_a^b \varphi \, du$$

come il valore comune (se esiste) dell'estremo superiore delle somme inferiori e l'estremo inferiore delle somme superiori. Notiamo che se $u(t) = t$ per ogni $t \in [a, b]$, otteniamo esattamente l'integrale di Riemann.

È possibile dimostrare che ogni funzione continua è integrabile secondo Stieltjes (qualunque sia u non decrescente).

Grazie alla Proposition 4.1, possiamo estendere l'integrale di Stieltjes anche a funzioni di variazione limitata: se v è una funzione a variazione limitata su $[a, b]$, esprimiamo v come differenza di due funzioni non decrescenti:

$$v = u_1 - u_1$$

e poniamo $\int_a^b \varphi \, dv = \int_a^b \varphi \, du_1 - \int_a^b \varphi \, du_2$.

È possibile dimostrare che il valore dell'integrale non dipende dalla scelta delle funzioni u_1 e u_2.

Definition 4.2. Denotiamo con $BV_0^+[a, b]$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ di variazione limitata su $[a, b]$ e continue da destra in (a, b), con $u(a) = 0$, munito della norma

$$\|u\| := \mathrm{Var}(u; [a, b]) \,.$$

Theorem 4.3 (Riesz)**.** *La formula*

$$f(x) = \int_a^b x \, du \qquad\qquad (x \in C[a, b])$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra i funzionali $f \in C[a, b]^*$ *e le funzioni* $u \in BV_0^+[a, b]$*. Questa corrispondenza è una isometria. Inoltre,* f *è non negativo (cioè,* $u \geq 0 \Rightarrow f(u) \geq 0$*) se e solo se* u *è non decrescente.*