

LA FORMULA DI ASCOLI (L.V.)

Formula di Ascoli. Siano X uno spazio normato (sul campo \mathbf{K}), $f \in X^* \setminus \{0\}$, $x_0 \in X$, $\alpha \in \mathbf{K}$. Allora

$$d(x_0, f^{-1}(\alpha)) = \frac{|f(x_0) - \alpha|}{\|f\|}.$$

Dimostrazione.

Per ogni $r > 0$ si ha: $\sup_{x \in rB_X} |f(x)| = r \sup_{x \in B_X} |f(x)| = r\|f\|$. Ne segue che

$$rB_X \cap f^{-1}(\|f\|) \begin{cases} = \emptyset & \text{se } 0 < r < 1; \\ \neq \emptyset & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

Di conseguenza, $d(0, f^{-1}(\|f\|)) = 1$. Ora,

$$\begin{aligned} d(x_0, f^{-1}(\alpha)) &= d(0, f^{-1}(\alpha) - x_0) = d\left(0, f^{-1}(\alpha - f(x_0))\right) \\ &= d\left(0, \frac{\alpha - f(x_0)}{\|f\|} f^{-1}(\|f\|)\right) = \frac{|\alpha - f(x_0)|}{\|f\|} d(0, f^{-1}(\|f\|)) \\ &= \frac{|\alpha - f(x_0)|}{\|f\|}. \end{aligned}$$

q.e.d.