Uniforme convessità di $\mathbf{L_p}(\mu)$ $(\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty)$ (L.V.)

La dimostrazione originale di J. Clarkson (del 1936), come (quasi) tutte le altre dimostrazioni che ho visto su vari testi, è lunga e abbastanza complicata. Essa viene condotta attraverso le cosiddette disuguaglianze di Clarkson che soddisfa la norma di $L_p(\mu)$. Riportiamo qui una dimostrazione sorprendentemente breve, trovata da J. Malý dell'Università di Praga.

Lemma.
(a) Per ogni $u, v \in \mathbf{R}$ si ha $\frac{1}{2}\big(|u+v|^p + |u-v|^p\big) \geq |u|^p$.
(b) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\gamma > 0$ tale che per $u, v \in \mathbf{R}$ con $\varepsilon|u| \leq |v|$ vale $\frac{1}{2}\big(|u+v|^p + |u-v|^p\big) \geq |u|^p + \gamma|v|^p$.

Dimostrazione: La funzione $\varphi(t) = |t|^p$ è strettamente convessa, perciò $\frac{1}{2}\big(\varphi(t+1) + \varphi(t-1)\big) - \varphi(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Ponendo $t = \frac{u}{v}$ si ottiene (a).

Per compattezza, esiste $\gamma > 0$ tale che $\frac{1}{2}\big(\varphi(t+1)+\varphi(t-1)\big) - \varphi(t) \geq \gamma$ per ogni $t \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$. Ciò implica (b).

Dimostrazione dell'uniforme convessità di $\mathbf{L_p}(\mu)$ $(\mathbf{1} < \mathbf{p} < +\infty)$.

Evidentemente basta dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se $x, y \in L_p(\mu)$, $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ e

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p > 1 - \delta\,, \qquad \text{allora} \qquad \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leq 2\varepsilon^p. \tag{$*$}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Definiamo i seguenti due insiemi

$$A = \big\{t : \varepsilon|x(t)+y(t)| > |x(t)-y(t)|\big\}$$
$$B = \big\{t : \varepsilon|x(t)+y(t)| \leq |x(t)-y(t)|\big\}$$

Applicando Lemma con $u = \frac{x(t)+y(t)}{2}$, $v = \frac{x(t)-y(t)}{2}$, otteniamo

$$\frac{1}{2}\big(|x(t)|^p + |y(t)|^p\big) \geq \begin{cases} \left|\frac{x(t)+y(t)}{2}\right|^p & \text{per } t \in A; \\ \left|\frac{x(t)+y(t)}{2}\right|^p + \gamma\left|\frac{x(t)-y(t)}{2}\right|^p & \text{per } t \in B. \end{cases}$$

Supponiamo adesso che $\int_X \left|\frac{x+y}{2}\right|^p d\mu > 1 - \delta$ (dove $\delta > 0$ è ancora da determinare). Da ciò

$$\begin{aligned} 1 = \int_X \frac{1}{2}\left(|x|^p + |y|^p\right) d\mu &\geq \int_X \left|\tfrac{x+y}{2}\right|^p d\mu + \gamma \int_B \left|\tfrac{x-y}{2}\right|^p d\mu \\ &\geq 1 - \delta + \gamma \int_B \left|\tfrac{x-y}{2}\right|^p d\mu\,, \end{aligned}$$

per cui $\int_B \left|\frac{x-y}{2}\right|^p d\mu \leq \frac{\delta}{\gamma}$. Per dimostrare $(*)$ osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_X \left|\frac{x-y}{2}\right|^p d\mu &\leq \int_A \left|\frac{x-y}{2}\right|^p d\mu + \frac{\delta}{\gamma} \\ &\leq \varepsilon^p \int_A \left|\frac{x+y}{2}\right|^p d\mu + \frac{\delta}{\gamma} \leq \varepsilon^p + \frac{\delta}{\gamma} \end{aligned}$$

e l'ultima quantità è minore di $2\varepsilon^p$ se $\delta > 0$ è sufficientemente piccolo.