FUNZIONI DI RADEMACHER (L.V.)

Funzioni di Rademacher sono le funzioni $r_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$) date da

$$r_n(t) = \text{sign}\,\sin(2^n \pi t).$$

In altre parole, ogni r_n è (2^{1-n})-periodica con $r_n(t) = 1$ per $0 < t < 2^{-n}$, $r_n(t) = -1$ per $2^{-n} < t < 2^{1-n}$, e $r_n(0) = r_n(2^{-n}) = 0$.

In altre parole ancora (con un po' di imprecisione): $r_1 = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(1/2,1)}$ e $r_{n+1}(t)$ vale 1 nella metà sinistra di ogni intervallo (massimale) sul quale r_n è costante, e vale -1 nella metà destra di tale intervallo.

Se vi disegnate le prime tre quattro funzioni di Rademacher, vedrete facilmente che

$$\int_0^1 r_i(t) r_j(t)\, dt = \delta_{ij}\,,$$

e, più in generale, se $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ sono a due a due distinti fra loro e $a_1, \ldots, a_n$ sono interi non negativi, allora

$$\int_0^1 r_{n_1}^{a_1}(t) \cdots r_{n_1}^{a_1}(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{se tutti gli } a_i \text{ sono pari;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre, $\|r_n\|_p = 1$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ e ogni $n \in \mathbf{N}$.

Corollario. *$\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ è un sistema ortonormale in $L_2[0,1]$, ma questo sistema non è completo in quanto, per esempio, la funzione $u(t) = r_1(t) r_2(t)$ è ortogonale a tutte le funzioni di Rademacher.* (Anche la funzione $u(t) = \cos(2\pi t)$ ha la stessa proprietà.)

Commento. È possibile usare le funzioni di Rademacher per costruire una base ortonormale di $L_2[0,1]$, fatta delle cosiddette *funzioni di Walsh*, contenente le funzioni di Rademacher. (Si veda Larsen: Functional Analysis - an introduction, §13.8.)

Proposizione. *Sia $\{\varphi_n\} \subset L_\infty[a,b] \setminus \{0\}$ una successione limitata tale che $\int_a^b \varphi_i \varphi_j = 0$ se $i \neq j$. Allora:*

1) $\varphi_n \overset{w^*}{\to} 0$ in $L_\infty[a,b]$;

2) $\varphi_n \overset{w}{\to} 0$ in $L_p[a,b]$ per ogni $1 \le p < +\infty$.

Dimostrazione.

1) Essendo $\{\varphi_n\}$ limitata, è sufficiente dimostrare che $\int_a^b \varphi_n u \to 0$ per ogni u appartenente ad un sottoinsieme denso di $L_1[a,b]$. Osserviamo che $L_2[a,b]$ è denso in $L_1[a,b]$ (perchè contiene, per esempio, tutte le funzioni semplici). Ora, per ogni $u \in L_2[a,b]$,

$$\int_a^b \varphi_n u = \|\varphi_n\|_2 \cdot \overline{\int_a^b \overline{u}\, \frac{\overline{\varphi_n}}{\|\varphi_n\|_2}} = \|\varphi_n\|_2 \cdot \langle \psi_n, \overline{u} \rangle$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare in $L_2[a,b]$ e $\psi_n = \varphi_n / \|\varphi_n\|_2$. Essendo $\{\psi_n\}$ un sistema ortonormale, $\langle \psi_n, \overline{u} \rangle \to 0$ (sono termini di un elemento di ℓ_2). Inoltre, se $\|\varphi_n\|_\infty \le c$ per ogni n, si ha $\|\varphi_n\|_2 \le c\sqrt{b-a}$.

2) Sappiamo dal punto 1) che $\int_a^b \varphi_n u \to 0$ per ogni $u \in L_1[a,b]$, per cui –a maggior ragione– anche per ogni $u \in L_q[a,b] = L_p[a,b]^*$.

q.e.d.

N.B. che *le funzioni di Rademacher soddisfano le ipotesi della Proposizione* sull'intervallo $[0,1]$. Lo stesso vale anche per le successioni $\{\sin nt\}$, $\{\cos nt\}$ su $[0,2\pi]$; in questo caso il significato di 1) è: i coefficienti della serie di Fourier di una funzione in $L_1[0,2\pi]$ convergono a zero.

Esercizio. Consideriamo le funzioni di Rademacher definite in modo periodico su tutto $\mathbf{R}$. Provate a dimostrare che $r_n \xrightarrow{w^*} 0$ in $L_\infty[a,b]$ per ogni intervallo compatto $[a,b] \subset \mathbf{R}$.
(Suggerimento: se entrambi gli estremi a,b sono del tipo $\frac{k}{2^m}$, allora $\int_a^b r_i r_j = 0$ se i,j sono distinti e sufficientemente grandi; nel caso generale, osservate che la convergenza w^* può essere "testata" con funzioni limitate [al posto di quelle in L_1], e approssimate l'intervallo $[a,b]$ con uno "buono".)

Le proprietà più importanti delle funzioni di Rademacher sono contenute nel seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema.
(a) [Rademacher] *Se $a \in \ell_2$, allora la funzione $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n r_n$ è definita quasi ovunque in* $[0,1]$.
(b) Se $a = (a_n) \notin \ell_2$, allora la funzione $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n r_n$ è definita al più su un insieme di misura nulla.
(c) [disuguaglianza di Khinchin] *Per ogni $p \in [1,+\infty)$ esistono costanti positive A_p e B_p tali che*

$$A_p \|a\|_2 \le \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r_n \right\|_p \le B_p \|a\|_2.$$

Si osservi che la disuguaglianza di Khinchin implica che tutte le norme $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p < +\infty)$ sullo spazio $\operatorname{span}\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (l'involucro lineare delle funzioni di Rademacher) sono equivalenti. Ne segue che la chiusura di $\operatorname{span}\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ in $L_p[0,1]$ è la stessa per tutti $p \in [1,+\infty)$. In particolare, coincide con la chiusura in $L_2[0,1]$, per la quale $\{r_n\}$ è una base ortonormale. Così, ogni spazio $L_p[0,1]$ $(1 \le p < +\infty)$ contiene un sottospazio isomorfo a uno spazio separabile di Hilbert, e quindi a ℓ_2.

Raffinando questi ragionamenti, è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema. *Per $1 \le p \le +\infty$, sia Rad_p la chiusura di $\operatorname{span}\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nello spazio $L_p[0,1]$. Allora:*
(a) per $1 \le p < +\infty$, Rad_p è isomorfo a ℓ_2 e

$$Rad_p = Rad_2 = \left\{ x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r_n : a = (a_n) \in \ell_2 \right\};$$

(b) per $1 < p < +\infty$, Rad_p è complementato in $L_p[0,1]$;
(c) Rad_∞ è isomorfo (isometrico nel caso reale) a ℓ_1.