CONTENUTO INDICATIVO DELLE LEZIONI SVOLTE
Analisi Funzionale II, 2002/2003, L. Vesely

`Leggenda (riguardante l'esame):`
`† con dimostrazione`
`‡ con dimostrazione solo studenti di Matematica`
`†† con idea di dimostrazione`

26/2/03 e **28/2/03** (prof. C. Zanco)

- definizione di *spazio vettoriale topologico*;
- equivalenza fra norme, isomorfismi fra spazi normati;
- † c_{00} non è completo in alcuna norma perché è a base algebrica numerabile;
- richiamo del teorema di Weierstrass sui polinomi;
- completamento di c_{00} nelle varie norme p;
- caratterizzazione della completezza con le serie assolutamente convergenti;
- † definizione dei duali, con dimostrazione che $\dim X < \infty \Leftrightarrow X^* = X^\sharp$;
- relazioni fra chiusura di $\mathrm{Ker}(T)$ e continuità di T per T lineare (in particolare, densità di $\mathrm{Ker}(f)$ se $f \in X^\sharp \setminus X^*$);
- X^* separabile $\Rightarrow$ X separabile.

5/3/03

Functional analysis is the study of certain topological-algebraic structures and of the methods by which knowledge of these structures can be applied to analytic problems.
(W. Rudin, Functional Analysis)

Df. Sia X uno spazio normato. La *mappa canonica* (o *immersione canonica nel secondo duale*) è l'applicazione (lineare) $J\colon X \ni x \mapsto \hat{x} \in X^{**}$, data dalla formula $\hat{x}(f) = f(x)$. La mappa canonica J è un'isometria. Se J è suriettiva, X viene detto *riflessivo.* (Se ciò è vero, X è necessariamente completo.)

Gli spazi c_0, c, ℓ_1, ℓ_p $(1 < p < \infty)$, ℓ_∞, $C[0,1]$, $L_1[0,1]$, $L_p[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ e loro proprietà (separabilità, riflessività, lo spazio duale) - si veda *Spazi concreti di funzioni e di successioni.*

12/3/03

***Thm.1 (Banach – Mazur).** *X, Y normati reali, $T\colon X \to Y$ isometria suriettiva con $T(0) = 0$. Allora T è lineare.*

***Thm.2 (Kadets).** *Ogni due spazi di Banach separabili a dimensione infinita sono omeomorfi.*

Teorema di Banach–Steinhaus, le convergenze w e w^* di successioni

Thm.3. *X, Y normati, $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ famiglia di operatori. Se $\mathcal{T}$ è puntualmente limitata su un insieme di II categoria di Baire (per es., su X se X è di Banach), allora la famiglia $\mathcal{T}$ è limitata.*

Df. X normato, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, $\{f_n\} \subset X$, $f \in X$.
a) $\{x_n\}$ *converge debolmente* a x (notazione: $x_n \xrightarrow{w} x$) se $g(x_n) \to g(x)$ per ogni $g \in X^*$.
b) $\{f_n\}$ *converge debolmente** a f (notazione: $f_n \xrightarrow{w^*} f$) se $f_n(y) \to f(y)$ per ogni $y \in X$.

Esempio. *Ogni successione ortonormale in uno spazio di Hilbert converge debolmente a* 0.

†**Thm.4.**

1. *X normato, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, $A \subset X^*$ t.che $\overline{\operatorname{span}} A = X^*$. Allora $x_n \xrightarrow{w} x$ se e solo se $\{x_n\}$ è limitata e $f(x_n) \to f(x)$ per ogni $f \in A$.*
2. *X Banach, $\{f_n\} \subset X^*$, $f \subset X^*$, $A \subset X$ t.che $\overline{\operatorname{span}} A = X$. Allora $f_n \xrightarrow{w^*} f$ se e solo se $\{f_n\}$ è limitata e $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in A$.* (N.B.: L'implicazione "$\Leftarrow$" vale anche se X è normato.)

Esercizi. $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, $\{f_n\} \subset X$, $f \in X$.

1) X Hilbert, $\{x_n\}$ ortogonale. Allora $x_n \xrightarrow{w} 0$ se e solo se $\{x_n\}$ è limitata.

†2) X Banach.
   a) Se $x_n \xrightarrow{w} x$ e $f_n \to f$, allora $f_n(x_n) \to f(x)$.
   b) Se $x_n \to x$ e $f_n \xrightarrow{w^*} f$, allora $f_n(x_n) \to f(x)$.

3) X Hilbert, $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x_n\| \to \|x\|$. Allora $x_n \to x$.

Thm.5 (Schur). *Nello spazio ℓ_1, ogni successione che converge debolmente, converge anche fortemente.* (Gli spazi di Banach in cui le successioni debolmente convergenti coincidono con quelle fortemente convergenti vengono chiamati *spazi di Schur*.)

Prop. $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$. *TFAE:*

(i) $\{x_n\}$ *è limitata;*

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ *converge per ogni* $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$ *t.che* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.

Esercizio. $1 < p < +\infty$, $(1/p) + (1/q) = 1$, $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Supponiamo che per ogni $u \in L_p(\mathbf{R})$ esista finito il limite $\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{+n} \varphi(t)u(t)\,dt$. Allora $\varphi \in L_q(\mathbf{R})$.

14/3/03

Due applicazioni di Banach–Steinhaus.

1. *X, Y normati, $A \subset X$, $F : A \to Y$ t.che $y^* \circ F$ sia lipschitziana per ogni $y^* \in Y^*$. Allora F è lipschitziana.*

2. Consideriamo il sottospazio chiuso $X = \{x \in C[0, 2\pi] : x(0) = x(2\pi)\}$ di $C[0, 2\pi]$.
Ad ogni funzione $x \in X$ possiamo associare la sua serie di Fourier $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$. Fissiamo un $t_0 \in [0, 2\pi]$ e, per ogni $N \in \mathbf{N}$, definiamo $f_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt_0 + b_n \sin nt_0)$. È possibile dimostrare che $f_N \in X^*$ (ciò è facile) e $\|f_N\| \to +\infty$. Applicando il teorema di B-S, si ottiene che l'insieme delle funzioni $x \in X$ la cui serie di Fourier converge nel punto t_0 è di I categoria di Baire. Considerando un qualsiasi insieme numerabile $A \subset [0, 2\pi]$ di punti t_0, si ottiene l'esistenza di una funzione continua $x \in X$ la cui serie di Fourier non converge in alcun punto dell'insieme A.

Df. *Somma diretta (esterna)* $X \oplus Y$ di due spazi normati X, Y è il prodotto cartesiano $X \times Y$ munito della norma $\|(x, y)\| = \|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$.

Esercizio. $X \oplus Y$ è di Banach se e solo se entrambi X, Y sono di Banach.

Osserv. *Se π è una norma su $\mathbf{R}^2$, allora $\|(x, y)\|_\pi := \pi(\|x\|, \|y\|)$ è una norma su $X \oplus Y$, equivalente alla norma $\|\cdot\|_1$.*

19/3/03

Teorema della mappa aperta e applicazioni

‡**Thm.6 (teorema della mappa aperta).** *X Banach, Y normato, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ t.che $T(X)$ sia di II categoria in Y (ciò è vero, per es., se Y è di Banach e $T(X) = Y$). Allora T è una mappa aperta, cioè $T(V)$ è aperto in Y per ogni aperto $V \subset X$. In particolare, $T(X) = Y$.*
(È anche possibile dimostrare che, in questo caso, Y è necessariamente uno spazio di Banach.)

Cor. *X, Y Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ iniettivo. Allora l'operatore inverso $T^{-1} : T(X) \to X$ è continuo se e solo se $T(X)$ è chiuso in Y. In particolare, se T è anche suriettivo, allora T è un isomorfismo fra X e Y.*

Cor. *X spazio vettoriale. Allora ogni due norme complete su X che inducono due topologie confrontabili fra loro, sono equivalenti.*

Esempio. Consideriamo ℓ_1 come sottoinsieme di c_0. Allora ℓ_1 è un sottospazio di I cat. non chiuso in c_0.

Esercizio. X, Y Banach, $\|\!|\cdot|\!\|$ una norma completa su $X \times Y$ t.che $\|\!|(\cdot, 0)|\!\|$ e $\|\!|(0, \cdot)|\!\|$ siano norme equivalenti alle norme, rispettivamente, di X e di Y. Allora $\|\!|\cdot|\!\|$ è una norma equivalente alla norma standard su $X \oplus Y$.

Esercizio. Un sottoinsieme C di uno spazio normato X viene detto *ω-convesso* se vale l'implicazione

$$\{x_n\} \subset C\,,\ \{\lambda_n\} \subset [0, +\infty)\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = 1\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \text{ converge in } X \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \in C.$$

Procedendo come nella dimostrazione del teorema della mappa aperta, dimostrare il seguente "lemma della sottrazione":
X normato, $A \subset X$ ω-convesso, $B \subset X$ limitato, $0 < t < 1$. Se $B \subset A + tB$, allora $(1-t)B \subset A$.

†Thm.7 (teorema del grafico chiuso). *X, Y Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se il grafico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ è chiuso in $X \oplus Y$, allora T è continuo.*

<u>**21/3/03**</u>

Esempio. X Banach, $1 \le p \le +\infty$, (Ω, Σ, μ) spazio con misura nonnegativa, $T\colon X \to L_p(\mu)$ applicazione lineare che soddisfi l'implicazione

$$x, x_n \in X,\ x_n \to x \quad \Rightarrow \quad (Tx_n)(t) \to (Tx)(t) \text{ per } \mu\text{-quasi ogni } t \in \Omega.$$

Allora T è continua.

Df.(somma diretta interna). X normato, M, N due sottospazi di X. Diciamo che X è *somma diretta (interna topologica)* di M e N se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:
(a) $X = M + N$, $M \cap N = \{0\}$ (cioè, X è somma diretta algebrica di M e N),
(b) le due proiezioni $P_M\colon X \ni m + n \mapsto m \in M$ e $P_N\colon X \ni m + n \mapsto n \in N$ sono continue.

Notazione: $X = M \oplus N$ (giustificata dal fatto che X è somma diretta interna di M, N se e solo se l'applicazione $m + n \mapsto (m, n)$ è un isomorfismo tra X e la somma diretta esterna $M \oplus N$).

Df.(complementazione). Un sottospazio chiuso M di uno spazio normato X si dice *complementato* in X se esiste un sottospazio N di X ("complemento topologico di M") tale che $X = M \oplus N$.

Esempi.
1. Siano X uno degli spazi classici di successioni, $A \subset \mathbf{N}$. Allora $X = M \oplus N$ dove

$$M = \{x \in X : x(n) = 0\ \forall n \in A\} \quad \text{e} \quad N = \{x \in X : x(n) = 0\ \forall n \in \mathbf{N} \setminus A\}.$$

2. Se X è uno spazio di Hilbert e $M \subset X$ è un suo sottospazio chiuso, allora $X = M \oplus (M^\perp)$.
3. Per ogni spazio normato X, il suo duale X^* (più precisamente, l'immagine canonica di X^* come sottoinsieme di X^{***}) è complementato in X^{***}.

***Thm.8 (Lindenstrauss–Tzafriri).** *Sia X uno spazio di Banach. Allora ogni sottospazio chiuso di X è complementato in X se e solo se X è isomorfo a uno spazio di Hilbert.*

***Thm.9 (Phillips–Sobczyk).** *c_0 non è complementato in ℓ_∞.*

26/3/03

Esercizio. Sia M un sottospazio chiuso dello spazio normato X. Allora sono equivalenti:
(i) M è complementato in X;
(ii) $\exists P \in \mathcal{L}(X, M)$ t.che $P(m) = m$ per ogni $m \in M$;
(iii) $\exists P \in \mathcal{L}(X, M)$ t.che $P^2 = P$ e $P(X) = M$.

†**Thm.10 (della somma diretta interna).** *X Banach, M, N due sottospazi vettoriali di X t.che $X = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$. Allora $X = M \oplus N$ se e solo se M, N sono entrambi chiusi.*

Thm.11. *Ogni sottospazio a dimensione finita in uno spazio normato è ivi complementato.*

Thm.12. *Ogni sottospazio chiuso a codimensione finita in uno spazio normato è ivi complementato.* (È stato dimostrato solo il caso di uno spazio di Banach.)

Il duale di $\mathbf{X \oplus Y}$

Prop. *X, Y spazi normati. Allora l'applicazione $X^* \oplus Y^* \ni (f, g) \mapsto F \in (X \oplus Y)^*$, data da $F(x, y) = f(x) + g(y)$, è un isomorfismo fra $X^* \oplus Y^*$ e $(X \oplus Y)^*$.*

Esercizio. X, Y normati, $1 \le p \le +\infty$, $1 \le p \le +\infty$ t.che $(1/p) + (1/q) = 1$. Denotiamo con $X \oplus_p Y$ lo spazio $X \oplus Y$ munito con la norma $\|(x, y)\|_p = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$ (con la solita modifica per $p = +\infty$). Dimostrare che il duale $(X \oplus_p Y)^*$ è isometrico allo spazio $X^* \oplus_q Y^*$.

Il duale di $\mathbf{C(K)}$

Siano K uno spazio topologico di Hausdorff e $\mathcal{B}$ la σ-algebra di Borel di K. Chiamiamo *misura di Radon* su K ogni misura finita (non negativa) boreliana ν su K che è *regolare*, cioè, per ogni $B \in \mathcal{B}$ soddisfa
$$\nu(B) = \sup\{\nu(C) : C \subset B,\ C \text{ compatto in } K\} = \inf\{\nu(A) : A \supset B,\ A \text{ aperto in } K\}.$$

Data una funzione $\mu: \mathcal{B} \to \mathbf{K}$ t.che μ sia σ-additiva e $\mu(\emptyset) = 0$, possiamo definire $|\mu|: \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ con la formula
$$|\mu|(B) = \sup\{\textstyle\sum_1^n |\mu(E_k)| : E_k \in \mathcal{B},\ E_k \subset B,\ E_i \cap E_j = \emptyset \text{ se } i \ne j\}.$$
Allora $|\mu|$ è una misura boreliana su K.

L'insieme $\mathcal{M}(K) = \{\mu: \mathcal{B} \to \mathbf{K} : \mu\ \sigma\text{-additiva},\ \mu(\emptyset) = 0,\ |\mu| \text{ misura di Radon}\}$ è uno spazio vettoriale che, nella norma
$$\|\mu\| = |\mu|(K) \qquad (\text{“variazione totale” di } \mu),$$
è uno spazio di Banach.

È possibile dimostrare che una funzione $\mu: \mathcal{B} \to \mathbf{K}$ appartiene a $\mathcal{M}(K)$ se e solo se μ è della forma
$$\mu = \nu_1 - \nu_2 + i(\nu_3 - \nu_4) \qquad (\text{con } \nu_3 = \nu_4 = 0 \text{ nel caso reale})$$
dove le ν_j sono misure di Radon su K. In tal caso possiamo definire l'integrale di una funzione $x \in C(K)$ rispetto μ con la formula
$$\textstyle\int_K x\,d\mu = \int_K x\,d\nu_1 - \int_K x\,d\nu_2 + i\int_K x\,d\nu_3 - i\int_K x\,d\nu_4.$$

Thm.13 (Riesz). *La formula $\left[\ f(x) = \int_K x\,d\mu \quad \forall x \in C(K)\ \right]$ definisce una corrispondenza biunivoca tra i funzionali $f \in C(K)^*$ e gli elementi $\mu \in \mathcal{M}(K)$, che è un'isometria. Inoltre, nel caso reale, $\mu \ge 0$ se e solo se il corrispondente funzionale $f \in C(K)^*$ è “non negativo” nel senso che $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in C(K)$ t.che $x \ge 0$.*

28/3/03

Confronto di convergenze di successioni in alcuni spazi classici

Esempio (ℓ_1). Intendiamo lo spazio ℓ_1 come il duale di c_0. Per una successione $\{x_n\} \subset \ell_1$ consideriamo le seguenti affermazioni:
(N) $x_n \to 0$ (cioè, $\|x_n\|_1 \to 0$);
(W) $x_n \xrightarrow{w} 0$ (cioè, $\langle x_n, u\rangle \to 0$ per ogni $u \in \ell_\infty$);

(W*) $x_n \stackrel{w^*}{\to} 0$ (cioè, $\langle x_n, u\rangle \to 0$ per ogni $u \in c_0$);
(BP) $\{x_n\}$ è limitata e $\lim_{n\to\infty} x_n(i) = 0$ per ogni $i \in \mathbf{N}$.

Valgono soltanto le implicazioni (N)⇔(W)⇒(W*)⇔(BP).

((W)⇒(N) vale per il teorema di Schur. Per (W*)$\not\Rightarrow$(W) si consideri $\{e_n\}$. (BP)⇒(W*) per il Teorema 4 perché $c_{00} = \mathrm{span}\{e_i : i \in \mathbf{N}\}$ è denso in c_0.)

Esempio ($\mathbf{C[0,1]}$). Per $\{x_n\} \subset C[0,1]$ consideriamo le seguenti affermazioni:
(N) $x_n \to 0$ (cioè $\|x_n\|_\infty \to 0$);
(W) $x_n \stackrel{w}{\to} 0$ (cioè $\int_0^1 x_n\, d\mu \to 0$ per ogni $\mu \in \mathcal{M}[0,1]$);
(BP) $\{x_n\}$ è limitata e $x_n(t) \to 0$ per ogni $t \in [0,1]$.

Valgono soltanto le implicazioni (N)⇒(W)⇔(BP).

((BP)⇒(W) segue dal teorema della convergenza dominata. (W)$\not\Rightarrow$(N): si consideri $x_n(0) = 0 = x_n(t)$ per $t \in [2/n, 1]$, $x_n(1/n) = 1$, x_n affine su $[0,1/n]$ e su $[1/n\,,\,2/n]$.)

Esempio ($\mathbf{L_p[0,1]}$). Siano $p,q \in (0,+\infty)$ t.che $(1/p)+(1/q) = 1$. Essendo L_p riflessivo, le convergenze debole e debole* coincidono. Per $\{x_n\} \subset L_p[0,1]$ consideriamo le seguenti affermazioni:
(N) $x_n \to 0$ (cioè $\|x_n\|_p \to 0$);
(W) $x_n \stackrel{w}{\to} 0$ (cioè $\int_0^1 x_n u\, d\mu \to 0$ per ogni $u \in L_q[0,1]$);
(BP) $\{x_n\}$ limitata e $x_n(t) \to 0$ per q.o. $t \in [0,1]$.

Valgono soltanto le implicazioni (N)⇒(W)⇐(BP).

((N)$\not\Rightarrow$(BP) è classica: il controesempio è la successione "macchina per scrivere". (BP)$\not\Rightarrow$(N): si consideri $x_n = n^{1/p}\chi_{[0,1/n]}$. Per dimostrare (BP)⇒(W) serve il teorema di Eberlein–Šmulyan, di cui parleremo più avanti, secondo il quale ogni successione limitata in uno spazio riflessivo ammette una sottosuccessione debolmente convergente e, inoltre, un lemma che troverete sotto questo esempio. Le non implicazioni (W)$\not\Rightarrow$(BP) e (W)$\not\Rightarrow$(N) seguono da quanto già dimostrato.)

<u>2/4/03</u>

Lemma. $1 \le p \le +\infty$. *Supponiamo che* $y, z, x_n \in L_p[0,1]$ *siano tali che* $x_n \stackrel{w}{\to} y$ *e* $x_n(t) \to z(t)$ *per q.o.* $t \in [0,1]$. *Allora* $y = z$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $z = 0$ (altrimenti sostituisco x_n con $x_n - z$).
a) Per ogni insieme misurabile $E \subset [0,1]$, il funzionale $f(x) = \int_E x$ appartiene a $(L_p)^*$. Ne segue che $\int_E x_n \to \int_E y$.
b) Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo $A_k = \{t \in [0,1] : |x_n(t)| \le 1 \text{ per ogni } n \ge k\}$. Gli insiemi A_k sono misurabili, inscatolati e $[0,1] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \cup N$, dove $m(N) = 0$. Per il teorema della convergenza dominata, se E è un insieme misurabile contenuto in qualche A_k, allora $\int_E x \to 0$.
c) Se $y(t)$ non fosse nullo quasi ovunque, allora almeno uno degli insiemi
$$C^+ = \{t : y(t) > 0\} \qquad \text{e} \qquad C^- = \{t : y(t) < 0\}$$
avrebbe misura positiva. Sia, per es., $m(C^+) > 0$. Allora necessariamente esisterebbe un $j \in \mathbf{N}$ t.che l'insieme $E_0 := C^+ \cap A_j$ avesse misura positiva. Ma ciò implicherebbe
$$0 < \int_{E_0} y \stackrel{\text{a)}}{=} \lim \int_{E_0} x_n \stackrel{\text{b)}}{=} 0\,,$$
una contraddizione. *q.e.d.*

Esercizio. Confronto di convergenze di successioni in $L_1[0,1]$ e in ℓ_p $(1 < p < +\infty)$.

Spazi vettoriali topologici

Df. *Spazio vettoriale topologico* (s.v.t.) è uno spazio vettoriale X con una topologia τ t.che siano continue le due applicazioni

$A\colon X \times X \to X$, $A(x,y) = x + y$

$M\colon \mathbf{K} \times X \to X$, $M(\lambda, x) = \lambda x$.

In questo caso diciamo che τ è una topologia *vettoriale* (o lineare) su X.

Esempi. Sono spazi vettoriali topologici: ogni spazio normato; lo spazio $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ di tutte le successioni a valori in $\mathbf{K}$ con la topologia prodotto (topologia della convergenza puntuale); gli spazi $L_p[0,1]$ e ℓ_p per $0 < p < 1$ con le metriche $d(x,y) = \int_0^1 |x-y|^p$ e $d(x,y) = \sum_1^{+\infty} |x_n - y_n|^p$.
Più avanti vedremo altri esempi.

Osservazione. X s.v.t., $a \in X$, $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$. Allora le applicazioni $x \mapsto x + a$ (traslazione) e $x \mapsto \lambda x$ (multiplo) sono omeomorfismi di X su se stesso. Quindi:
(a) U è un intorno di 0 se e solo se $a + U$ è un intorno di a;
(b) U è un intorno di a se e solo se λU è un intorno di λa;
(c) U è un intorno di 0 se e solo se λU è un intorno di 0.

Df. $\mathcal{U}(0) = \{U \subset X : U \text{ aperto}, 0 \in U\}$.
Una famiglia $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(0)$ è una *base di intorni di* 0 se ogni elemento di $\mathcal{U}(0)$ contiene qualche elemento di $\mathcal{B}$.

Df. X s.v., $A \subset X$.
A è *simmetrico* $\equiv$ $-A = A$.
A è *bilanciato* $\equiv$ $\lambda A \subset A$ per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$ t.che $|\lambda| \leq 1$.
A è *convesso* $\equiv$ $(1-t)x + ty \in A$ per ogni $x, y \in A$ e ogni $t \in [0,1]$.
A è *assorbente* $\equiv$ $\forall x \in X\ \exists t > 0$ t.che $x \in tU$.

Esercizio. A è convesso se e solo se $\sum_1^n \lambda_i x_i \in A$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, ogni $x_1, \ldots, x_n \in A$ e ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ t.che $\sum_1^n \lambda_i = 1$.
(Suggerimento: induzione rispetto al numero dei punti x_i.)

Esercizio. X, Y spazi vettoriali, $A \subset X$, $T\colon X \to Y$ lineare, $\mathcal{P} \in \{$"simmetrico", "bilanciato", "convesso"$\}$.
1. L'intersezione di una famiglia di sottoinsiemi di X aventi tutti la proprietà $\mathcal{P}$ ha anch'essa la $\mathcal{P}$.
2. Se X è uno s.v.t. e A ha la $\mathcal{P}$ allora anche gli insiemi $\overline{A}$, $\mathrm{int}(A)$ e $T(A)$ hanno la $\mathcal{P}$.

Thm.14. *X s.v.t., $U \in \mathcal{U}(0)$. Allora:*
(a) U è assorbente (addirittura, se $t_n > 0$ e $t_n \to +\infty$ allora $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} t_n U$);
(b) $\exists V \in \mathcal{U}(0)$ t.che $V + V \subset U$;
(c) $\exists V \in \mathcal{U}(0)$ t.che $\overline{V} \subset U$;
(d) $\exists V \in \mathcal{U}(0)$ bilanciato t.che $V \subset U$;
(e) se U è convesso, $\exists V \in \mathcal{U}(0)$ convesso bilanciato t.che $V \subset U$.

<u>4/4/03</u>

Df. Uno s.v.t. si dice *localmente convesso* se $\{V \in \mathcal{U}(0) : V \text{ convesso}\}$ è una base di $\mathcal{U}(0)$.

Cor. *X s.v.t. Allora:*
1) $\{V \in \mathcal{U}(0) : V \text{ bilanciato}\}$ è una base di $\mathcal{U}(0)$;
2) se X è localmente convesso, $\{V \in \mathcal{U}(0) : V \text{ convesso bilanciato}\}$ è una base di $\mathcal{U}(0)$.

Thm.15. *X s.v.t., $C \subset X$ chiuso, $K \subset X$ compatto, $C \cap K = \emptyset$. Allora esiste $U \in \mathcal{U}(0)$ tale che $(C + U) \cap (K + U) = \emptyset$.*

Cor. *Ogni s.v.t. è regolare (cioè T_3).*

Cor. (proprietà di separazione). *Per X s.v.t. sono equivalenti:*
(i) X è T_1 (cioè, i punti di X sono chiusi);
(ii) X è T_2 (cioè, di Hausdorff);
(iii) X è T_1 e T_3.

CONVENZIONE. Da adesso in poi *s.v.t.* vuol dire s.v.t.+Hausdorff.

Thm.16 (metrizzabilità). *X s.v.t.*

(I) X è metrizzabile se e solo se X ammette una base numerabile di $\mathcal{U}(0)$.

(II) Se X è metrizzabile, allora esiste una metrica d su X tale che

- *d genera la topologia di X,*
- *d è invariante per traslazioni ($d(x,y) = d(x+z, y+z)$),*
- *le d-bolle aperte $B^0(0,r)$ sono bilanciate.*

Se X è anche localmente convesso, allora la metrica d invariante per traslazioni può essere scelta in modo che le d-bolle aperte $B^0(0,r)$ siano convesse e bilanciate.

†**Thm.17 (funzionali lineari).** *X s.v.t., $f \in X^\sharp \setminus \{0\}$. Sono equivalenti:*

(i) f è continuo;

(ii) f è continuo in 0;

(iii) f è limitato in qualche intorno di 0;

(iii') (solo nel caso reale) f è limitato superiormente in qualche intorno di 0;

(iv) $\operatorname{Ker} f$ è chiuso in X;

(v) $\operatorname{Ker} f$ non è denso in X.

Esempio. Consideriamo il funzionale $f(x) = \int_{\mathbf{R}} x(t)\,dt$ sullo spazio normato (con la norma $\|\cdot\|_\infty$) $C_c(\mathbf{R}) = \{x \in C(\mathbf{R}) : \operatorname{spt}(x) \text{ compatto}\}$, dove $\operatorname{spt}(x) = \overline{\{t : x(t) \neq 0\}}$. Allora f non è continuo, perché il suo nucleo è denso. (N.B.: la discontinuità è verificabile anche direttamente.)

<u>9/4/03</u>

Spazi finito dimensionali

Prop. *Ogni sottospazio finito dimensionale in uno s.v.t. è chiuso.*

Thm.18. *X, Y s.v.t., $\dim X < \infty$. Allora ogni applicazione lineare $T\colon X \to Y$ è continua.*

Cor.

(a) Ogni due s.v.t. della stessa dimensione finita (sullo stesso campo $\mathbf{K}$) sono isomorfi fra loro.

(b) Su uno s.v. finito dimensionale, tutte le topologie vettoriali coincidono.

Thm.19. *Uno s.v.t. è finito dimensionale se e solo se contiene un intorno V di 0 t.che $\overline{V}$ è compatto.*

Cor. *X s.v.t., $\dim X = \infty$, $K \subset X$ compatto. Allora $\operatorname{int} K = \emptyset$.*

Seminorme e locale convessità

Df. X s.v., $p\colon X \to \mathbf{R}$.

- p è una *seminorma* se, per ogni $\alpha \in \mathbf{K}$ e ogni $x, y \in X$, si ha: $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.
- p è *sublineare* se, per ogni $t \ge 0$ e ogni $x, y \in X$, si ha: $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $p(tx) = tp(x)$.

Osservazione. Ogni seminorma è nonnegativa.

Prop. *Sia p una funzione sublineare su uno s.v.t. X. Allora sono equivalenti:*

(i) p è continua;

(ii) p è continua in 0;

(iii) p è limitata superiormente su qualche intorno di 0.

Df. X s.v., $A \subset X$ assorbente. Il *funzionale di Minkowski* dell'insieme A è la funzione $\mu_A\colon X \to [0, +\infty)$, data da $\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}$.

Esempi.

1) In $X = \mathbf{R}$, se $0 \in (a,b)$ allora $\mu_{(a,b)}(x) = \begin{cases} x/b & \text{se } x \ge 0 \\ x/a & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

2) In uno spazio normato X, $\mu_{B_X} = \mu_{B^0_X} = \|\cdot\|$.

Proposizione. *X s.v., $A \subset X$ assorbente. Allora:*
(a) μ_A è sublineare;
(b) $\{x \in X : \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X : \mu_A(x) \le 1\}$;
(c) se A è anche bilanciato, allora μ_A è una seminorma.

Df. Una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme su X è *separante* se per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ con $p(x) \neq 0$.

Thm.20.
A. *X s.v.t. localmente convesso, $\mathcal{B} = \{V \in \mathcal{U}(0) : V$ convesso bilanciato$\}$ (è una base di $\mathcal{U}(0)$). Allora $\mathcal{P} = \{\mu_V : V \in \mathcal{B}\}$ è una famiglia separante di seminorme continue su X.*
B. *X s.v., $\mathcal{P}$ una famiglia separante di seminorme su X. Ad ogni $p \in \mathcal{P}$ e ogni $\varepsilon > 0$* [oppure $\varepsilon = 1/n$ $(n \in \mathbf{N})$] *associamo l'insieme $V(p, \varepsilon) = \{x \in X : p(x) < \varepsilon\}$. Allora la famiglia $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di tali insiemi è una base di intorni convessi bilanciati di 0 di una topologia (localmente convessa) su X, nella quale ogni $p \in \mathcal{P}$ è continua.*

Osserv. Siano (X, τ) uno spazio localmente convesso e $\mathcal{P}$ la corrispondente famiglia separante di seminorme (v. il teorema precedente). Una successione $\{x_n\}$ converge a x nella topologia τ se e solo se $p(x_n - x) \to 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$.

Esempi.
1. $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto, $X = C(\Omega)$. La famiglia separante delle seminorme $p_K(x) = \max_{t \in K} |x(t)|$ ($K \subset \Omega$ compatto) definisce su $C(\Omega)$ la topologia (localmente convessa) della convergenza uniforme sui compatti. Essa è metrizzabile, perché è sufficiente considerare un numero numerabile di seminorme p_{K_n}, dove $\{K_n\}$ è una successione crescente di sottoinsiemi compatti di Ω la cui unione è Ω.
2. $X = C^\infty[0,1]$ con le norme $p_n(x) = \|x^{(n)}\|_\infty$ (la p_0 è una norma) che inducono su $C^\infty[0,1]$ la topologia della convergenza uniforme di funzioni insieme a tutte le loro derivate. È una topologia più fine di quella generata dalla sola norma $\|\cdot\|_\infty$.
3. $X = C^\infty(\Omega)$ con le seminorme $p_{\beta,K}(x) = \max_{t \in K} |D_\beta x(t)|$ (β multiindice, $K \subset \Omega$ compatto). La corrispondente tolopogia è metrizzabile (come nel primo esempio).
4. $X = \mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{x \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{spt}(x) \subset \Omega$ compatto$\}$ come sottospazio di $C^\infty(\Omega)$. Gli elementi del duale $\mathcal{D}(\Omega)^*$ vengono chiamati *distribuzioni* o *funzioni generalizzate* e sono importanti, per es., nella teoria delle soluzioni deboli di equazioni differenziali a derivate parziali.

"Intermezzo geometrico". X s.v., $f \in X^\sharp \setminus \{0\}$.
†1. Il nucleo $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ è un sottospazio di codimensione uno in X.
†2. Per ogni $\alpha \in \mathbf{K}$, $f^{-1}(\alpha)$ è un traslato di $f^{-1}(0)$. (Più precisamente, per ogni $x_0 \in f^{-1}(\alpha)$, $f^{-1}(\alpha) = x_0 + f^{-1}(0)$.) Perciò, possiamo chiamare *iperpiani* gli insiemi di livello $f^{-1}(\alpha)$.
3. Se X è reale e $\alpha \in \mathbf{R}$, allora X è l'unione disgiunta dei seguenti tre insiemi convessi: l'iperpiano $H_\alpha = f^{-1}(\alpha)$ e i due semispazi $H_{>\alpha} = \{x : f(x) > \alpha\}$ e $H_{<\alpha} = \{x : f(x) < \alpha\}$. L'iperpiano H_α separa i due semispazi nel senso che ogni insieme convesso che interseca entrambi i semispazi interseca necessariamente anche l'iperpiano. (E se X è uno s.v.t. ed f è continuo, ogni insieme connesso che interseca entrambi i semispazi inteseca anche l'iperpiano. In questo caso i due semispazi sono aperti e H_α è la frontiera di ognuno dei due.)
4. Nel caso complesso possiamo considerare in modo simile (sempre con α reale) gli insiemi
$H_\alpha = \{x : \mathrm{Re}f(x) = \alpha\}$, $H_{>\alpha} = \{x : \mathrm{Re}f(x) > \alpha\}$, $H_{<\alpha} = \{x : \mathrm{Re}f(x) < \alpha\}$.

<u>11/4/03</u>

Formula di Ascoli. *X normato, $f \in X^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $x_0 \in X$. Allora* $\mathrm{dist}(x_0, f^{-1}(\alpha)) = \frac{|f(x_0) - \alpha|}{\|f\|}$.

Dalla formula di Ascoli seguono quasi immediatamente le formule classiche per la distanza di un punto da un piano nello spazio o da una retta nel piano. (Per la dimostrazione della formula di Ascoli si veda il file *La formula di Ascoli.*)

Teoremi di Hahn–Banach

††Thm.21 (H-B, forma algebrica reale). *X s.v. reale, $p: X \to \mathbf{R}$ sublineare, M sottospazio di X, $\varphi: M \to \mathbf{R}$ lineare t.che $\varphi \le p$ su M. Allora esiste $f: X \to \mathbf{R}$ lineare t.che $f_{|M} = \varphi$ e $f \le p$ su X.*

<u>16/4/03</u>

†Thm.22 (H-B, forma algebrica generale). *X s.v. (reale o complesso), M sottospazio di X, $p: X \to \mathbf{R}$ seminorma, $\varphi: M \to \mathbf{K}$ lineare t.che $|\varphi| \le p$ su M. Allora esiste una estensione lineare $f: X \to \mathbf{K}$ di φ t.che $|f| \le p$ su X.*

Cor. *X normato, M sottospazio di X, $\varphi \in M^*$. Allora esiste $f \in X^*$ t.che $f_{|M} = \varphi$ e $\|f\| = \|\varphi\|$.*

Cor. *X normato, $x_0 \in X$. Allora esiste $f \in X^*$ t.che $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.*

†Thm.23 (H-B, forma geometrica). *X s.v.t. reale, $A, B \subset X$ due insiemi convessi disgiunti.*

1. *Se A è aperto, allora esiste $f \in X^* \setminus \{0\}$ t.che $\sup f(A) \le \inf f(B)$. Inoltre, per un opportuno $\gamma \in \mathbf{R}$, $f(a) < \gamma \le f(b)$ per ogni $a \in A$, $b \in B$.*
2. *Supponiamo che X sia localmente convesso, A sia compatto e B sia chiuso. Allora esiste $f \in X^*$ t.che $\sup f(A) < \inf f(B)$. Di conseguenza, esistono $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}$ con $f(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < f(b)$ per ogni $a \in A$, $b \in B$.*

Commento. Thm.23 vale anche nel **caso complesso** se, al posto di f, scriviamo $\mathrm{Re} f$ in tutte le disuguaglianze.

Cor. *Se X è uno s.v.t. localmente convesso, allora X^* separa i punti di X.*

Cor. *X s.v.t. localmente convesso, M sottospazio di X, $\varphi \in M^*$. Allora esiste $f \in X^*$ che estende φ.*

Lemma algebrico. *X s.v., $f_1, \ldots, f_n, g \in X^\sharp$. Allora sono equivalenti:*

(i) $g \in \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$;
(ii) $\exists c \ge 0 : |g| \le c \cdot \max\{|f_1|, \ldots, |f_n|\}$;
(iii) $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

<u>30/4/03</u>

Topologie deboli – costruzione generale

Siano X uno spazio vettoriale e L uno spazio vettoriale di funzionali lineari su X ($L \subset\subset X^\sharp$) t.che L separi i punti di X nel senso che, per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $f \in L$ con $f(x) \neq 0$. (Si dice anche che L è *totale* per X.)

Df. La topologia vettoriale localmente convessa su X generata dalla famiglia (separante!) delle seminorme del tipo $p_f(x) = |f(x)|$ ($f \in L$) viene denotata con $\sigma(X, L)$.

Osservazioni.

(a) Gli insiemi $V_{\varepsilon,F} = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon \ \forall f \in F\}$ ($\varepsilon > 0$, $F \subset L$ finito) formano una base di $\mathcal{U}(0)$ per la $\sigma(X, L)$.
(b) $L \subset \big(X, \sigma(X, L)\big)^*$.
(c) Ogni $\sigma(X, L)$-intorno U di 0 contiene un intorno $V_{\varepsilon,F}$ (come in (a)) che, a sua volta, contiene il sottospazio a codimensione finita $\bigcap_{f \in F} \mathrm{Ker}(f)$. In particolare, se $\dim(X) = \infty$, ogni $\sigma(X, L)$-intorno U di 0 contiene un sottospazio ∞-dimensionale (e quindi una retta).

Esempio. La topologia $\sigma(X, X^\sharp)$ rende continui tutti i funzionali lineari su X, per cui $\big(X, \sigma(X, X^\sharp)\big)^* = X^\sharp$. Se X è uno spazio normato a dimensione infinita, la topologia $\sigma(X, X^\sharp)$ e la topologia $\tau_{\|\cdot\|}$ della norma non sono confrontabili.

Prop. *$\sigma(X, L)$ coincide con la topologia meno fine su X nella quale siano continui tutti gli elementi di L.*

Thm.24. *$\big(X, \sigma(X, L)\big)^* = L$.*

La topologia debole e debole* in spazi normati

Df. Sia X uno spazio normato.
1. La *topologia debole* su X è la topologia $w := \sigma(X, X^*)$.
2. La *topologia debole** su X^* è la topologia $w^* := \sigma(X^*, \hat{X})$.

Gli insiemi convessi $V_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n} = \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\}$ ($\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $f_i \in X^*$) formano una base di $\mathcal{U}(0)$ per la topologia debole su X.
Gli insiemi convessi $W_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n} = \{f \in X^* : |f(x_i)| < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\}$ ($\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $x_i \in X$) formano una base di $\mathcal{U}(0)$ per la topologia debole* su X^*.

†**Osservazioni.**
(a) $(X, w)^* = X^*$ (e quindi $(X^*, w)^* = X^{**}$); $(X^*, w^*)^* = \hat{X}$.
(b) $w \leq \tau_{\|\cdot\|}$ su X. Inoltre, $w = \tau_{\|\cdot\|}$ se e solo se X è finito dimensionale.
(c) $w^* \leq w \leq \tau_{\|\cdot\|}$ su X^*. Inoltre, $w^* = \tau_{\|\cdot\|}$ se e solo se X è finito dimensionale.
(d) $w^* = w$ su X^* se e solo se X è riflessivo.

†**Thm.25.** *In uno spazio normato, ogni sottoinsieme convesso chiuso è anche w-chiuso.*

Esempio. Teorema 25 non vale per la topologia debole* su X^*, a meno che X non sia riflessivo. Infatti, se X non è riflessivo e $F \in X^{**} \setminus \hat{X}$ allora $\mathrm{Ker}(F)$ è un insieme chiuso e convesso in X^* ma non è w^*-chiuso.

Cor. *X normato, $C \subset X$ convesso. Allora $\overline{C}^w = \overline{C}$.*

Cor. (Mazur). *Se $x_n \xrightarrow{w} x_0$ in uno spazio normato, allora <u>arbitrariamente</u> vicino a x_0 esistono delle combinazioni convesse di elementi di $\{x_n\}$ (in altre parole: $x_0 \in \overline{\mathrm{conv}\{x_n\}}$).*

Cor. *Se $x_n \xrightarrow{w} x_0$ in uno spazio normato, allora $\|x_0\| \leq \liminf \|x_n\|$. Di conseguenza anche $\|x_0 - a\| \leq \liminf \|x_n - a\|$ per ogni $a \in X$.*

Lemma. *Per ogni spazio normato X, la bolla duale B_{X^*} è w^*-chiusa.*

Cor. *Se $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$ nel duale di uno spazio normato, allora $\|f_0\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

<u>**7/5/03**</u>

Osservazione. *Sia M un sottospazio di uno spazio normato X. Allora le due topologie deboli $w_M := \sigma(M, M^*)$ e $w_X := \sigma(X, X^*)$ coincidono su M.*

†**Thm.26 (Goldstine).** *Per ogni spazio normato X, la bolla $B_{\hat{X}}$ è w^*-densa in $B_{X^{**}}$.*

‡**Thm.27 (Banach–Alaoglu).** *Per ogni spazio normato X, B_{X^*} è w^*-compatta.*

Cor. *X Banach, $A \subset X^*$. Allora A è w^*-compatto se e solo se A è limitato e w^*-chiuso.*

Cor. *X Banach riflessivo.*
(a) B_X è w-compatta.
(b) $A \subset X$ è w-compatto se e solo se A è limitato e w-chiuso. In particolare, un sottoinsieme convesso chiuso limitato di X è w-compatto.

Df. X s.v., $C \subset X$ convesso, $f : C \to \mathbf{R}$. La funzione f è detta *quasi-convessa* se, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, l'insieme $\{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$ è convesso.

Esercizio.
1. Ogni funzione convessa è quasi-convessa.
2. f è quasi-convessa se e solo se $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ per ogni $\lambda \in [0,1]$ e ogni x, y.

†**Thm.28.** *X Banach riflessivo, $C \subset X$ convesso chiuso, $f : C \to \mathbf{R}$ quasi-convessa, continua e limitata inferiormente. Supponiamo che sia soddisfatta una delle seguenti due condizioni:*
(α) C è limitato;

(β) C è illimitato e $f(x) \to +\infty$ per $\|x\| \to +\infty$, $x \in C$.
Allora f assume il suo minimo su C.

Cor. *X Banach riflessivo, $C \subset X$ convesso chiuso. Allora per ogni $x_0 \in X$ esiste $c \in C$ t.che $\|x_0 - c\| =$ $\mathrm{dist}(x_0, C)$.* (Gli insiemi C con la proprietà della tesi vengono chiamati *prossiminali.*)

Esercizio. Per ogni spazio normato X, ogni sottoinsieme w^*-chiuso di X^* è prossiminale.

Applicazioni in Teoria dell'approssimazione astratta. X normato.

1. (*Centri di Chebyshev.*)
   $x_0 \in X$ è un centro di Chebyshev di un insieme limitato $A \subset X$ se x_0 è un punto di minimo (su X) della funzione $\varphi(x) = \sup_{a \in A} \|x - a\|$. Geometricamente, x_0 è il centro di una bolla chiusa del minimo raggio, che contenga A. Esistono esempi di spazi di Banach contenenti un insieme di tre punti privo di centri di Chebyshev. È facile vedere che la funzione φ è convessa 1-lipschitziana (e quindi continua) e soddisfa $\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty$. Ne segue che *in uno spazio riflessivo, ogni insieme limitato ammette almeno un centro di Chebyshev.*
   `Esercizio.` Dimostrare che, per ogni insieme limitato $A \subset \mathbf{R}$, il punto $x_0 = (1/2)(\inf A + \sup A)$ è l'unico centro di Chebyshev di A.
2. (*Mediane.*)
   $x_0 \in X$ è *mediana* per un insieme finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$ se x_0 è un punto di minimo (su X) per la funzione $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x - a_i\|$. Anche in questo caso esistono esempi di insiemi di tre punti senza mediane. Analogamente al caso dei centri di Chebyshev, *in uno spazio riflessivo, ogni insieme finito ammette almeno una mediana.*
   `Esercizio.` Sia $A \subset \mathbf{R}$ un insieme finito di cardinalità n. Dimostrare: *a)* se n è dispari, l'unica mediana di A è il suo "punto medio" rispetto all'ordine di $\mathbf{R}$; *b)* se n è pari, l'insieme delle mediane di A coincide con il segmento chiuso di cui estremi sono i due "punti medi" di A rispetto all'ordine di $\mathbf{R}$.

9/5/03

Riflessività

Ricordiamo che tutti i seguenti spazi sono riflessivi: gli spazi finito dimensionali, gli spazi di Hilbert, gli spazi ℓ_p e $L_p[0,1]$ per $1 < p < +\infty$. Ogni spazio normato riflessivo è completo.

†**Thm.29.** *X normato. Allora X è riflessivo se e solo se la bolla B_X è w-compatta.*

Cor. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è riflessivo.*

Thm.30 (caratterizzazioni di riflessività). *X Banach. Sono equivalenti:*
- *(i) X riflessivo;*
- *(ii) X^* riflessivo;*
- *(iii) le topologie w e w^* su X^* coincidono;*
- *(iv) B_X è w-compatta;*
- *(v)* **(Eberlein–Šmulyan):** *B_X è w-compatta per successioni;*
- *(vi) X contiene un insieme w-compatto avente punti $\tau_{\|\cdot\|}$-interni;*
- *(vii)* **(James):** *ogni $f \in X^*$ assume la sua norma;*
- *(viii) ogni sottospazio chiuso di X è riflessivo;*
- *(ix) ogni sottospazio chiuso separabile di X è riflessivo.*

Corollario. *Ogni successione limitata in uno spazio riflessivo ammette una sottosuccessione w-convergente.*

Commento. Ricordiamo che se X è riflessivo allora lo è anche ogni spazio isomorfo a X. Lo stesso non è vero se scriviamo "duale" al posto di "riflessivo". Infatti, vale il seguente **teorema di Davis e Johnson**: *se X non è riflessivo allora esiste una norma equivalente $|||\cdot|||$ su X t.che $(X, |||\cdot|||)$ non sia isomorfo ad alcuno spazio duale.*

Enunciamo il seguente teorema correlato con il teorema di James.

***Thm.31 (Bishop–Phelps).** *Per ogni spazio di Banach X, i funzionali $f \in X^*$ che assumono la norma sono densi in X^*.*

Metrizzabilità delle topologie deboli

Thm.32.
1. *X normato. Allora (X, w) è metrizzabile se e solo se $\dim(X) < \infty$.*
2. *X Banach. Allora (X^*, w^*) è metrizzabile se e solo se $\dim(X) < \infty$.*

Commento. Siccome la dimensione algebrica di uno spazio di Banach non può essere infinita numerabile, la seconda parte del Teorema 32 può essere vista come corollario del seguente risultato:
X normato. Allora (X^*, w^*) è metrizzabile se e solo se $\dim(X)$ è al più numerabile.

Thm.33. *X normato.*
1. *(B_{X^*}, w^*) è metrizzabile se e solo se X è separabile.*
2. *(B_X, w) è metrizzabile se e solo se X^* è separabile.*

Cor. *Se X è separabile, allora ogni successione limitata in X^* ammette una sottosuccessione w^*-convergente.*

Commento. Enunciamo anche il seguente risultato, in qualche modo analogo al Teorema 33:
Sia K uno spazio topologico di Hausdorff. Allora $C(K)$ è separabile se e solo se K è metrizzabile.

14/5/03

PUNTI FISSI

Per una funzione $F\colon X \to X$, denoteremo $\mathrm{Fix}(F) = \{x \in X : F(x) = x\}$ (l'insieme dei punti fissi di F).

†Osservazioni generali. *X insieme, $F\colon X \to X$, $x_0 \in X$, $k \in \mathbf{N}$.*
1. $\mathrm{Fix}(F) \subset \mathrm{Fix}(F^k)$.
2. *Se $\mathrm{Fix}(F^k) = \{x_0\}$, allora $\mathrm{Fix}(F) = \{x_0\}$.*
3. *Se X è topologico e $\forall x_1 \in X$ $(F^k)^n(x_1) \to x_0$ (per $n \to +\infty$), allora anche $F^n(x_1) \to x_0$ per ogni $x_1 \in X$.*

Contrazioni

Thm.34. *X metrico completo, $F\colon X \to X$ t.che almeno una delle iterate F^k sia una contrazione. Allora F ammette un unico punto fisso x_0 e, per ogni $x_1 \in X$, $F^n(x_1) \to x_0$.*

Thm.35 (dipendenza continua). *X metrico completo, T topologico, $0 \le q < 1$, $F\colon X \times T \to X$ t.che*
- *$\forall t \in T : F(\cdot, t)$ sia una q-contrazione;*
- *$\forall x \in X : F(x, \cdot)$ sia continua su T.*

Allora:
- (a) *$\forall t \in T$ $\exists! x_t \in X : F(x_t, t) = x_t$;*
- (b) *$t \mapsto x_t$ è continua;*
- (c) *se T è metrico e $\exists L \ge 0$ $\forall x \in X$ $F(x, \cdot)$ è L-lipschitziana, allora la funzione $t \mapsto x_t$ è $\frac{L}{1-q}$-lipschitziana.*

Seguono alcune applicazioni.

Esempio. Una cartina molto precisa di Milano è stata appoggiata sul pavimento di un autobus della linea "61". Allora in ogni momento t durante il percorso tra via Saldini e piazza S. Babila esiste un unico punto p_t della cartina tale che p_t si trovi esattamente sopra il punto da esso rappresentato. Inoltre, la funzione $t \mapsto p_t$ è continua.

‡Proposizione (perturbazioni contrattive dell'identità). *X Banach, $A \subset X$ aperto, $F\colon A \to X$ contrazione.*
1. *L'insieme $B := (I + F)(A)$ è aperto e $I + F$ è un omeomorfismo bi-lipschitziano fra A e B.*

2. Se $A = X$ allora $(I + F)(X) = X$.

Esempio. Sia $K \in C([a,b] \times [a,b])$. Esiste $\delta > 0$ t.che, per ogni $y \in C[a,b]$ con $\|y\| \le \delta$, esiste una funzione $x \in C[a,b]$ che risolve la seguente equazione integrale non lineare

$$x(t) + \int_a^b K(t,s)\, x(s)^2\, ds \;=\; y(t) \qquad (t \in [a,b]).$$

Esercizio. X Banach, $x_0 \in X$, $r > 0$, $F\colon B(x_0,r) \to X$ una contrazione t.che $F\big(\partial B(x_0,r)\big) \subset B(x_0,r)$. Allora F ha un unico punto fisso.
(*Suggerimento.* Considerate $G(x) = \frac{x+F(x)}{2}$, confrontate i punti fissi di G con quelli di F, mostrate che G è una contrazione che manda la bolla $B(x_0,r)$ in se stessa. Per dimostrare quest'ultimo fatto, osservate che possiamo supporre $x_0 = 0$, e considerate, per $x \in rB_X$, un u di norma r con $x = (\|x\|/r)u$. *Attenzione, non fate maggiorazioni grossolane.*)

16/5/03

Thm.36. *X metrico completo, $F\colon X \to X$. Supponiamo che esista una funzione $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ continua monotona non decrescente con $\varphi(t) < t$ per ogni $t > 0$, t.che*

$$d\big(F(x), F(y)\big) \le \varphi\big(d(x,y)\big) \qquad \forall x, y \in X.$$

Allora $\mathrm{Fix}(F) = \{x_0\}$ *e* $\forall x_1 \in X$: $F^n(x_1) \to x_0$.

Commento. Ogni q-contrazione soddisfa le ipotesi di Teorema 36 con $\varphi(t) = qt$.

Esempio. *Per l'esistenza di punti fissi negli spazi metrici completi non è sufficiente $d\big(F(x),F(y)\big) < d(x,y)$ per ogni x, y distinti.* Si consideri $X = [0,+\infty)$, $F(x) = x + \frac{1}{1+x}$.

Pseudo-contrazioni

Chiamiamo *pseudo-contrazioni* le applicazioni F tali che $d\big(F(x),F(y)\big) < d(x,y)$ per ogni x, y distinti fra loro.

Thm.37. *X metrico compatto, $F\colon X \to X$ t.che almeno una delle iterate F^k sia una pseudo-contrazione. Allora:*
†*(a)* $\mathrm{Fix}(F) = \{x_0\}$;
(b) $F^n(x_1) \to x_0$ *per ogni* $x_1 \in X$.

Thm.38 (dipendenza continua). *X metrico compatto, T topologico di Hausdorff, $F\colon X \times T \to X$ t.che*
◦ $\forall t \in T : F(\cdot, t)$ *sia una pseudo-contrazione;*
◦ $\forall x \in X : F(x, \cdot)$ *sia continua.*
Allora:
(a) $\forall t \in T\ \exists! x_t \in X : F(x_t, t) = x_t$;
(b) $t \mapsto x_t$ *è continua.*

Esempio. *Per l'esistenza di punti fissi negli spazi metrici compatti non è sufficiente $d\big(F(x),F(y)\big) \le d(x,y)$ per ogni x, y.* Si consideri $X = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, $F(z) = -z$.

Mappe non espansive

Chiamiamo *non espansive* le applicazioni 1-lipschitziane, cioè le applicazioni F tali che $d\big(F(x),F(y)\big) \le d(x,y)$ per ogni x, y.

Il seguente teorema rappresenta un'applicazione del teorema di Banach–Caccioppoli.

†**Thm.39.** *X normato, $K \subset X$ stellato compatto, $F\colon K \to K$ non espansiva. Allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Cor. *X normato, $C \subset X$ convesso chiuso, $F\colon C \to C$ non espansiva t.che* $\overline{\mathrm{conv}}\, F(C)$ *sia compatto (*ciò succede, per es., quando X è di Banach e $\overline{F(C)}$ è compatto*). Allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

21/5/03

Thm.40 (variante del precedente). *X riflessivo, $C \subset X$ convesso chiuso, $F\colon C \to C$ non espansiva, limitata, (w-w)–continua. Allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Mappe non espansive su insiemi non $\tau_{\|\cdot\|}$-compatti

Siano: X Banach, $C \subset X$ convesso chiuso limitato (non vuoto), $F\colon C \to C$ non espansiva.

Sotto quali ulteriori ipotesi su X, ma non su F, possiamo concludere che F ha almeno un punto fisso? (L'esempio di $F = I$ mostra che non possiamo sperare di avere un unico punto fisso. È facile vedere che l'insieme $\mathrm{Fix}(F)$ è sempre chiuso.)

Esempi.
1. $\mathrm{Fix}(F)$ *può non essere convesso:* $X = \big(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty\big)$, $C = B_X$, $F(x,y) = (x, |x|)$.
2. $\mathrm{Fix}(F)$ *può non essere connesso:* $X = c_0$, $C = B_{c_0}$, $F(x) = (x_1, 1 - |x_1|, x_2, x_3, \ldots)$.
3. $\mathrm{Fix}(F)$ *può essere vuoto:* $X = c_0$, $C = B_{c_0}$, $F(x) = (1, x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Df. Uno spazio normato si dice *strettamente convesso* se la sua sfera unitaria $S_X = \partial B_X$ non contiene segmenti di lunghezza positiva.

Prop. *X normato. Allora sono equivalenti:*
(i) *X è strettamente convesso;*
(ii) $[\ x, y \in X,\ \|x\| = 1 = \|y\|,\ x \neq y\ ] \Longrightarrow \|(x+y)/2\| < 1$;
(iii) $[\ x, y \in X,\ \|x+y\| = \|x\| + \|y\|\ ] \Longrightarrow$ *x, y sono linearmente dipendenti.*

Esempi.
- Sono strettamente convessi: $\mathbf{R}$, $L_p(\mu)$ con $1 < p < +\infty$, Hilbert.
- Non sono strettamente convessi: $C[0,1]$, ℓ_1, $L_1[0,1]$, ℓ_∞, $L_\infty[0,1]$, c_0, c.

††**Prop.** *X normato strettamente convesso, $C \subset X$ convesso, $F\colon C \to C$ non espansiva. Allora* $\mathrm{Fix}(F)$ *è convesso.*

Df. X normato, $C \subset X$ convesso. Un punto $x_0 \in C$ si dice *non diametrale* (per C) se $\sup_{c \in C} \|x_0 - c\| < \mathrm{diam}(C)$.

Osserviamo che, se C ha un punto non diametrale, allora $0 < \mathrm{diam}(C) < +\infty$.

Esempio. *L'insieme* $C = \{x \in C[0,1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\ \forall t \in [0,1]\}$ *(come sottoinsieme di $C[0,1]$) è privo di punti non diametrali.*

Df. (Milman–Brodskij, 1948). X normato, $C \subset X$ convesso (può essere $C = X$). Diciamo che C ha *struttura normale* se ogni sottoinsieme convesso limitato $C_0 \subset C$ con $\mathrm{diam}(C_0) > 0$ ha almeno un punto non diametrale.

Dall'ultimo esempio segue che $C[0,1]$ e $B_{C[0,1]}$ non hanno struttura normale.

††**Thm.41 (Kirk, 1965).** *X normato, $C \subset X$ convesso w-compatto* (per es.: X riflessivo, C convesso chiuso limitato)*, $F\colon C \to C$ non espansiva. Se C ha struttura normale, allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

23/5/03

Esercizio. Definite la nozione di "w^*-struttura normale" (di un insieme convesso w^*-chiuso) in modo che valga il seguente teorema:

X normato, $C \subset X^*$ convesso limitato w^*-chiuso, C ha w^*-struttura normale, $F\colon C \to C$ non espansiva. Allora F ha almeno un punto fisso.

Esercizio*. Provate a dimostrare che lo spazio $\ell_1 = (c_0)^*$ ha w^*-struttura normale.

Df. (uniforme convessità). Uno spazio normato X si dice *uniformemente convesso* se
$\forall\varepsilon \in (0,2]\ \exists\delta > 0 : \big[x, y \in B_X,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta\big]$.

Dato $\varepsilon \in (0,2]$, "il migliore" (cioè, il più grande) δ che possa soddisfare la definizione dell'uniforme convessità è il numero

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \|(x + y)/2\| : x, y \in B_X,\ \|x - y\| \geq \varepsilon\}.$$

Questa formula definisce una funzione $\delta_X\colon [0,2] \to [0,1]$ monotona non decrescente con $\delta_X(0) = 0$. Essa viene chiamata *modulo di convessità* di X. (Non cambia niente se, nella definizione di uniforme convessità o nella formula che definisce δ_X, scriviamo S_X al posto di B_X.)

Lemma. *X normato. Allora sono equivalenti:*
(i) X *è uniformemente convesso;*
(ii) $\delta_X(\varepsilon) > 0\ \forall\varepsilon \in (0,2]$;
(iii) $\{x_n\}, \{y_n\} \subset B_X$, $\big\|\frac{x_n+y_n}{2}\big\| \to 1 \Longrightarrow \|x_n - y_n\| \to 0$.

<u>**28/5/03**</u>

Osservazione. *X normato, $x, y \in X$, $\|x\| \leq r$, $\|x\| \leq r$. Allora $\|(x + y)/2\| \leq r\big(1 - \delta_X(\|x - y\|/r)\big)$.*

Esercizio. Sia X uno spazio normato uniformemente convesso. Dimostrare:
1. $(S_X, w) = (S_X, \tau_{\|\cdot\|})$;
2. $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $\|x_n\| \to \|x_0\| \Rightarrow \|x_n - x_0\| \to 0$.

Thm.42. *Gli †spazi di Hilbert e gli spazi $L_p(\mu)$ con $1 < p < \infty$ sono uniformemente convessi.*

Thm.43. *Ogni spazio uniformemente convesso ha struttura normale (ed è strettamente convesso).*

†Thm.44. *X Banach uniformemente convesso. Allora X è riflessivo.*

È noto che, nei teoremi 43 e 44, non vale il vice versa: esistono spazi di Banach X riflessivi separabili strettamente convessi con struttura normale tali che X non sia uniformemente convesso (neanche se munito con una qualsiasi norma equivalente).

Il teorema che segue è una conseguenza diretta del teorema di Kirk e dei teoremi 43 e 44 (e della seconda proposizione dopo Thm.40).

†Thm.45. *X Banach uniformemente convesso (per es. uno spazio di Hilbert), $C \subset X$ convesso chiuso limitato (non vuoto), $F\colon C \to C$ non espansiva. Allora $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$ ed è convesso.*

Nella teoria di punti fissi di mappe non espansive è stato importantissimo il seguente controesempio di Alspach.

Esempio (Alspach, 1981). $X = L_1[0,1]$, $C = \{x \in L_1[0,1] : 0 \leq x(t) \leq 2 \text{ q.o.}, \int_0^1 x = 1\}$. Allora C è convesso w-compatto ed esiste un'isometria (e quindi mappa non espansiva) $F\colon C \to C$ priva di punti fissi.

Rimane invece aperto il seguente **problema famoso**:
Siano X uno spazio riflessivo e $C \subset X$ un insieme convesso chiuso limitato non vuoto; è vero che ogni mappa non espansiva di C in sé ha almeno un punto fisso?

Esempi di mappe non espansive. H Hilbert reale.
1. $A \subset H$, $F\colon A \to H$. Se F è monotona, cioè $\big\langle F(x) - F(y), x - y\big\rangle \geq 0\ \forall x, y \in A$, allora $I + F$ è iniettiva e la sua inversa $(I + F)^{-1}\colon (I + F)(A) \to A$ è non espansiva.
2. $C \subset H$ convesso chiuso (non vuoto). Per ogni $x \in H$, sia $P_C(x) \in C$ il punto più vicino a x. Allora la *proiezione metrica* P_C è non espansiva e monotona.

3. Per ogni $r > 0$, la proiezione radiale $P_r\colon H \to rB_H$, data da

$$P_r(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \le r, \\ \frac{r}{\|x\|}x & \text{se } \|x\| > r, \end{cases}$$

è non espansiva.

Esercizi. H Hilbert, $A \subset H$, $F\colon A \to H$.
(a) F è monotona se e solo se, per ogni $\lambda > 0$, $I + \lambda F$ è iniettiva e $(I + \lambda F)^{-1}$ è non espansiva.
(b) Se F è non espansiva, allora $I - F$ è monotona.

Esercizio. X spazio metrico, $K \subset X$ compatto t.che $\forall x \in X\ \exists! P_K(x) \in K : d(x, P_K(x)) = dist(x, K)$. Allora la proiezione metrica P_K è continua.

<u>30/5/03</u>

È noto che la stretta convessità non implica l'uniforme convessità. Più precisamente, *ogni spazio normato che è strettamente convesso e infinito-dimensionale ammette una norma equivalente nella quale esso è strettamente convesso ma non uniformemente convesso.* Le due nozioni sono invece equivalenti per gli spazi a dimensione finita:

†**Prop.** *X normato, $\dim(X) < \infty$. Allora X è uniformemente convesso se e solo se X è strettamente convesso.*

Esempio. *Per ogni $L > 1$ esiste una funzione L-lipschitziana $F\colon B_{\ell_2} \to B_{\ell_2}$ priva di punti fissi.* Si consideri, per $\varepsilon \in (0, 1]$, la funzione $F_\varepsilon(x) = \big(\varepsilon(1 - \|x\|_2), x_1, x_2, \ldots\big)$ che è lipschitziana con la costante $L = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$.

Punti fissi di funzioni continue

Thm.46 (Brouwer, 1912). *Ogni funzione continua di $B_{\mathbf{R}^n}$ in sé ha almeno un punto fisso.*

Esistono varie dimostrazioni di questo importante teorema. Il teorma di Brouwer può essere dimostrato facilmente con gli strumenti di topologia algebrica. Per una dimostrazione più o meno classica si veda, per esempio, uno dei seguenti libri:
- J. Dugundji & A. Granas, *Fixed Point Theory*;
- D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*;
- E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I: Fixed-Point Theorems*.

Il libro di K. L. Kuttler, *Modern Analysis*, ne contiene (in Appendix 4) una dimostrazione "analitica".

Il teorema di Brouwer per $n = 1$ è un facile esercizio di Analisi 1. Riportiamo qui **una dimostrazione del teorema di Brouwer per $\mathbf{n = 2}$**:
Identifichiamo $\mathbf{R}^2$ con $\mathbf{C}$. Supponiamo che F non abbia punti fissi. Ad ogni $x \in B_{\mathbf{C}}$ associamo il vettore unitario $v(x) = \frac{F(x)-x}{|F(x)-x|}$. Per ogni $r \in (0, 1]$, consideriamo la curva $x_r(t) = re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ e definiamo il numero intero relativo ("indice") $i(r)$ come il numero dei giri compiuti da $v(x_r(t))$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Essendo la funzione $v(x)$ uniformemente continua, la funzione $i(r)$ è continua e quindi costante (perché a valori interi). Calcoliamo $r(1)$. Per ogni $t \in [0, 2\pi]$, sia $\tau(t) = ie^{it} = e^{i(t+\pi/2)}$ (il vettore unitario tangente al cerchio B_{C} nel punto $x_1(t)$ e orientato nella direzione del moto di $x_1(t)$). Siccome $\tau(t)$ compie un giro al variare di $t \in [0, 2\pi]$, anche $v(x_1(t))$, che si trova sempre "a sinistra" di $\tau(t)$, ne compie esattamente uno; perciò $i(1) = 1$.
Dall'altra parte, se $r > 0$ è sufficientemente piccolo, allora $v(x_r(t))$ si trova arbitrariamente vicino al vettore (costante!) $v(0)$, per cui $i(r) = 0$ per ogni r sufficientemente piccolo. Ma ciò è in contraddizione con il fatto che l'indice i è costante.

<u>4/6/03</u>

†**Thm.47 (Brouwer, versione completa).** *$C \subset \mathbf{R}^n$ convesso chiuso (non vuoto), $F: C \to C$ continua e limitata. Allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Cor. *X s.v.t., $K \subset X$ convesso compatto (non vuoto) finito dimensionale (cioè,* $\dim \mathrm{span}(K) < \infty$*), $F: K \to K$ continua. Allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

†**Lemma.** *X s.v.t., $E \subset X$ finito. Allora* $\mathrm{conv}(E)$ *è compatto.*

Lemma. *X Banach, $K \subset X$ compatto. Allora* $\overline{\mathrm{conv}(K)}$ *è compatto.*

Lemma (partizione dell'unità). *X metrico, $A_1, \ldots, A_n \subset X$ aperti con $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Allora esistono funzioni continue $\lambda_i: X \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ tali che, per ogni $x \in X$:*
- *$\lambda_i(x) \geq 0$;*
- *$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1$;*
- *$\lambda_i(x) > 0 \Rightarrow x \in A_i$.*

[Il lemma vale anche per X topologico compatto di Hausdorff.]

†**Thm.48 (Schauder, 1930).** *X normato, $K \subset X$ convesso compatto (non vuoto), $F: K \to K$ continua. Allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Commento.
1. Thm.48 vale anche per X s.v.t. localmente convesso (Tikhonov, 1935); la dimostrazione è completamente analoga a quella del teorema di Schauder.
2. Per molti anni era rimasto aperto il problema se Thm.48 vale anche per X s.v.t. non necessariamente localmente convesso. Solo recentemente un matematico francese, R. Cauty, ha presentato una dimostrazione complicatissima (con ogni probabilità giusta) del teorema generale.

Cor. *X Banach, $C \subset X$ convesso chiuso (non vuoto), $F: C \to C$ continua con $\overline{F(C)}$ compatto. Allora* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.
[Vale anche per X normato, ma per dimostrarlo è necessario ripetere, in modo opportuno, la dimostrazione del teorema di Schauder.]

Il seguente teorema di V. Klee mostra la necessità dell'ipotesi di compattezza nel teorema di Schauder.

Thm.49 (Klee). *X normato, $K \subset X$ convesso. Allora sono equivalenti:*
(i) K è compatto;
(ii) K ha la <u>proprietà del punto fisso</u>, cioè ogni funzione continua $F: K \to K$ ha almeno un punto fisso.

<u>6/6/03</u>

Df.
1. Diciamo che uno spazio topologico T ha la *proprietà del punto fisso* (brevemente, *PPF*) se ogni funzione continua di T in sé ha almeno un punto fisso.
2. $S \subset T$ è un *retratto* di T se esiste una funzione continua (detta *retrazione*) $r: T \to S$ t.che $r(x) = x$ per ogni $x \in S$.

Osserv. *T spazio topologico con la PPF.*
1. *Ogni spazio omeomorfo a T ha la PPF.*
2. *Ogni retratto di T ha la PPF.*
3. *T è connesso.*

Problemino. Lo spazio topologico $T = \big\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\big\} \cup \big(\{0\} \times [-1, 1]\big) \subset \mathbf{R}^2$ ha la PPF ?

Punti fissi comuni

†**Osserv. (di base).** *X insieme, $F, G\colon X \to X$ due funzioni che commutano fra loro (cioè, $F \circ G = G \circ F$). Allora $G\big(\mathrm{Fix}(F)\big) \subset \mathrm{Fix}(F)$.*

Cor. *X insieme, $\mathcal{F}$ una famiglia commutativa di funzioni $X \to X$. Se esiste $F_0 \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{Fix}(F_0) = \{x_0\}$, allora $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{Fix}(F) = \{x_0\}$.*

††**Thm.50.** *X s.v.t., $C \subset X$ convesso chiuso, $\mathcal{F}$ una famiglia commutativa di funzioni $C \to C$. Supponiamo che sia soddisfatta almeno una delle seguenti tre condizioni:*
(1) [Browder] *X Banach uniformemente convesso (per es. Hilbert), C limitato, ogni $F \in \mathcal{F}$ è nonespansiva;*
(2) *X normato strettamente convesso, C compatto, ogni $F \in \mathcal{F}$ è nonespansiva;*
(3) [Markov–Kakutani] *X localmente convesso, C compatto, ogni $F \in \mathcal{F}$ è continua affine (cioè, per ogni $x, y \in C$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha $F\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) = (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)$).*
Allora $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Commento. Dalla dimostrazione segue che la condizione (3) in Thm.50 può essere sostituita dalla seguente più generale:
(3') *X localmente convesso, C compatto, ogni $F \in \mathcal{F}$ è continua con $\mathrm{Fix}(F)$ convesso.*

11/6/03

Esempi di applicazioni dei teoremi di Brouwer, Schauder e Markov–Kakutani

†**Prop.** *X Banach, $C \subset X$ convesso chiuso, $F\colon C \to C$ continua, limitata e t.che $\overline{F(E)}$ sia compatto per ogni limitato $E \subset C$. Allora $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.*

Thm.(Frobenius). *Sia A una matrice reale $n \times n$ con tutti i termini positivi. Allora A ha almeno un autovalore positivo e, fra i relativi autovettori, ce n'è almeno uno con tutte le coordinate positive.*

†**Thm.(Peano).** *$\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ aperto, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ continua, $(t_0, x_0) \in \Omega$. Allora il problema di Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ ha (almeno) una soluzione locale.*

Nelle applicazioni può capitare di avere un'equazione del tipo $Lx + F(x) = 0$, dove L è un operatore lineare invertibile (fra opportuni spazi). In questo caso possiamo scrivere l'equazione nella forma equivalente $x = -L^{-1}F(x)$ e cercare di applicare qualche teorema del punto fisso. Come esempio riportiamo il seguente teorema.

Thm. *$0 < T < +\infty$, $g\colon [0,T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e limitata, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora il problema al contorno $x'' = \lambda^2 x + g(t, x, x')$, $x(0) = x(T) = 0$ ha almeno una soluzione.*

Idea della dimostrazione. Consideriamo $C_0^2[0,T] = \{x \in C^2[0,T] : x(0) = x(T) = 0\}$ che è uno spazio di Banach. L'applicazione lineare $L\colon C_0^2[0,T] \to C[0,T]$, data da $Lx = x'' - \lambda^2 x$ è continua, iniettiva e suriettiva; quindi (per il teorema della mappa aperta) L^{-1} è continua. L'applicazione $G\colon C^1[0,T] \to C[0,T]$, data da $G(x)(t) = g(t, x(t), x'(t))$ è continua e limitata. Osserviamo che il nostro problema al contorno equivale all'equazione $Lx = G(x)$ ($x \in C_0^2[0,T]$). L'inclusione $i\colon C_0^2[0,T] \hookrightarrow C^1[0,T]$ è continua e manda i limitati in relativamente compatti (per la versione del teorema di Ascoli–Arzelà per gli spazi C^k, v. sotto). Allora l'applicazione composta $F : C_0^2[0,T] \overset{i}{\hookrightarrow} C^1[0,T] \xrightarrow{G} C[0,1] \xrightarrow{L^{-1}} C_0^2[0,T]$ è continua, limitata e manda i limitati in relativamente compatti. Perciò F ha almeno un punto fisso in $C_0^2[0,T]$. *q.e.d.*

Cor. *Siano T e g come nel teorema precedente. Allora per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ il problema al contorno $x'' = \lambda^2 x + g(t, x, x')$, $x(0) = a$, $x(T) = b$ ha almeno una soluzione.*
Infatti, sia z una soluzione del problema
$z''(t) = \lambda^2 z(t) + g\Big(t, z(t) + a + (b-a)t/T, z'(t) + (b-a)/T\Big) + \lambda^2 a + \frac{\lambda^2(b-a)}{T}t$, $z(0) = z(T) = 0$,
che esiste secondo il teorema. Allora la funzione $x(t) = z(t) + a + \frac{b-a}{T}t$ è soluzione del problema iniziale.

Thm.(Ascoli–Arzelà per $\mathbf{C^k[a,b]}$). *$A \subset C^k[a,b]$ è relativamente compatto se e solo se la famiglia $\mathcal{A} = \{x^{(j)} : x \in A,\ 0 \le j \le k\}$ è equilimitata ed equicontinua.*

Dimostrazione. Sia A rel. compatto in $C^k[a,b]$. Essendo ognuna delle applicazioni $D_j\colon C^k[a,b] \to C[a,b]$, $x \mapsto x^{(j)}$, continua, allora gli insiemi $D_j(A)$ sono compatti, e quindi equilimitati ed equicontinui; inoltre l'unione di questi ultimi è $\mathcal{A}$.
Ora, sia $\mathcal{A}$ equilimitato ed equicontinuo. Se $\{x_n\}$ è una successione in $\mathcal{A}$, per il teorema di Ascoli–Arzelà esiste una sottosuccessione $\{x_{n_p}\} \subset \{x_n\}$ e funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C[a,b]$ t.che $x_{n_p}^{(j)} \to \varphi_j$ in $C[a,b]$, cioè uniformemente, per ogni $0 \le j \le n$. Se dimostriamo che $\varphi_j = \varphi_0^{(j)}$ $(1 \le j \le k)$, avremo dimostrato che $x_{n_p} \to \varphi_0$ in $\mathcal{A}$. Ma ciò segue dal noto teorema di derivazione delle successioni. *q.e.d.*

Thm.(esistenza degli zeri). *X normato con $\dim(X) < \infty$, $F\colon B_X \to X$ continua t.che $\forall z \in S_X (= \partial B_X)$ $\forall \lambda > 0$: $F(x) \ne \lambda z$. Allora $F(y) = 0$ per qualche $y \in B_X$.*

13/6/03

Banach Limits ("limiti" di successioni non convergenti).

Essendo lo spazio c delle successioni convergenti un sottospazio di ℓ_∞ e il funzionale lineare $x \mapsto \lim(x_n)$ continuo su c, per il teorema di Hahn–Banach esiste un funzionale continuo lineare $\Lambda \in (\ell_\infty)^*$ tale che $\Lambda(x) = \lim(x)$ per ogni $x \in c$. Il funzionale Λ, che non è unico, non può essere rappresentato con un elemento di ℓ_1, mostrando così che ℓ_1 è un sottospazio proprio di ℓ_∞^*.

Il funzionale Λ può non essere "shift-invariante", cioè può succedere che $\Lambda\big((x_n)\big) \ne \Lambda\big((x_{n+a})\big)$ per qualche $a \in \mathbf{N}$ e $x \in \ell_\infty \setminus c$. Per eliminare questo inconveniente, è possibile applicare il teorema di Markov–Kakutani allo spazio vettoriale (ℓ_∞^*, w^*), l'insieme (convesso w^*-compatto) $K = \{f \in \ell_\infty^* : f(x) \le \limsup(x_n)\, \forall x \in \ell_\infty\}$ e la famiglia commutativa di mappe affini $(w^* - w^*)$-continue $F_a\colon K \to K$ $(a \in \mathbf{N})$, date da $F_a(f)\big((x_n)\big) = f\big((x_{n+a})\big)$, per ottenere il seguente teorema.

Thm.(Banach limits). *Esiste (ma non è unico) un funzionale Λ continuo lineare su ℓ_∞ t.che:*
(a) $\liminf(x_n) \le \Lambda(x) \le \limsup(x_n)$ *per ogni $x \in \ell_\infty$ (in particolare, $\Lambda(x) = \lim(x_n)$ per ogni $x \in c$);*
(b) se $x, y \in \ell_\infty$, $x \le y$, allora $\Lambda(x) \le \Lambda(y)$;
(c) $\Lambda\big((x_n)\big) = \Lambda\big((x_{n+a})\big)$ *per ogni $x \in \ell_\infty$ e $a \in \mathbf{N}$ (in particolare, $\Lambda(x) = \Lambda(y)$ se x, y differiscono soltanto in un numero finito di coordinate);*
(d) $\|\Lambda\| = 1$.