SPAZI CONCRETI DI FUNZIONI E DI SUCCESSIONI (L.V.)

Di solito, il termine *spazi di Banach classici* si riferisce ai seguenti spazi:

- spazi di dimensione finita;
- spazi di Hilbert;
- spazi di successioni c_0, c, ℓ_p;
- spazi di funzioni $C(K)$, L_p.

La prima sezione di questo testo contiene le definizioni di spazi classici di funzioni e di successioni, e di alcuni loro parenti. Nella seconda sezione riassumiamo alcune proprietà di base di questi spazi.

1. Spazi

In quanto segue, $\mathbb{K}$ denota il campo degli scalari che può essere sia $\mathbb{R}$ sia $\mathbb{C}$.

Funzioni continue. Siano K, T spazi topologici di cui K compatto.

- $C(K) = C^0(K) = \{x \colon K \to \mathbb{K} \mid\ x \text{ continua}\}$ con la norma
  $\|x\|_\infty = \max_{t \in K} |x(t)|$.
- $C_b(T) = \{x \colon T \to \mathbb{K} \mid\ x \text{ continua e limitata}\}$ con la norma
  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in T} |x(t)|$.

Funzioni limitate, funzioni essenzialmente limitate. Siano Γ un insieme e (E, Σ, μ) uno spazio con misura nonnegativa.

- $\ell_\infty(\Gamma) = B(\Gamma) = \{x \colon \Gamma \to \mathbb{K} \mid\ x \text{ limitata}\}$ con la norma
  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \Gamma} |x(t)|$.
- $L_\infty(E, \Sigma, \mu) = L_\infty(\mu) = \{x \colon E \to \mathbb{K} \mid\ x \text{ misurabile e } \mu\text{-q.o. limitata}\}/\sim$
  (quoziente rispetto alla relazione di equivalenza "$\sim$" dell'uguaglianza μ-quasi ovunque su E) con la norma
  $\|x\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 \mid\ |x(t)| \leq \alpha \ \mu\text{-q.o.}\}$.
  (Esercizio: mostrare che l'estremo inferiore è in realtà un minimo.)
- Se non viene specificata la misura, si sottintende la misura di Lebesgue; per es. $L_\infty[0,1] = L_\infty([0,1], \mathcal{M}, m)$ dove $\mathcal{M}$ è la σ-algebra dei sottoinsiemi di $[0,1]$ misurabili secondo Lebesgue e m è la misura di Lebesgue. Spesso si scrive brevemente L_∞ al posto di $L_\infty[0,1]$.

Funzioni integrabili. Siano (E, Σ, μ) uno spazio con misura nonnegativa, $0 < p < +\infty$.

- $L_p(\mu) = L_p(E, \Sigma, \mu) = \{x \colon E \to \mathbb{K} \mid\ x \text{ misur.},\ \int_E |x|^p \, d\mu < +\infty\} /\!\sim$ con:
  - se $1 \le p < +\infty$, la norma $\|x\|_p = \big(\int_E |x(t)|^p \, d\mu(t) \big)^{1/p}$;
  - se $0 < p < 1$, la metrica $d_p(x, y) = \int_E |x(t) - y(t)|^p \, d\mu(t)$ (in questo caso $L_p(\mu)$ non è uno spazio normabile ma soltanto uno spazio vettoriale metrico completo).

  Anche per questi spazi vengono usate notazioni analoghe a quelle degli spazi $L_\infty(\cdot)$. In particolare, $L_p = L_p[0, 1]$.
- $L_0(\mu) = L_0(E, \Sigma, \mu) = M(E, \Sigma, \mu) = \{x \colon E \to \mathbb{K} \mid\ x \text{ misur.}\} /\!\sim$ con la metrica completa $d_0(x, y) = \int_E \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|} \, d\mu(t)$.

Funzioni hölderiane, funzioni lipschitziane. Siano M uno spazio metrico, $m_0 \in M$, $0 < \alpha \le 1$.

- $C^{0,\alpha}(M) = \{x \colon M \to \mathbb{K} \mid\ \exists L \ge 0 :\ |x(t) - x(s)| \le L[d(t, s)]^\alpha\ \forall t, s \in M\}$
  con la norma $\|x\|_{0,\alpha} = |x(m_0)| + \Lambda(x)$ dove
  $$\Lambda(x) = \sup\{ \tfrac{|x(t)-x(s)|}{[d(t,s)]^\alpha} \mid\ t, s \in M,\ t \ne s\}.$$
- $Lip(M) = C^{0,1}(M)$.

Domanda di controllo: *Perché non vengono considerate le funzioni hölderiane con un esponente $\alpha > 1$?*

Funzioni differenziabili. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $k \ge 1$ intero, $0 < \alpha \le 1$. Multiindice di altezza k è un vettore $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ con tutte le coordinate intere nonnegative e $|\beta| := \sum_{i=1}^n \beta_i = k$. Se u è una funzione di classe $C^k(\Omega)$, le derivate di ordine fino a k non dipendono dall'ordine di derivazione, per cui possiamo definire
$$D^\beta u = \frac{\partial^k u}{\partial t_1^{\beta_1} \cdots \partial t_n^{\beta_n}} .$$

- $C^k(\overline{\Omega}) = \{x \colon \Omega \to \mathbb{K} \mid\ \forall \beta, |\beta| \le k :\ D^\beta x \text{ prolung. con continuità su } \overline{\Omega}\}$
  con, per esempio, una delle seguenti due norme equivalenti
  $$\|x\| = \sum_{0 \le |\beta| \le k} \|D^\beta x\|_\infty \qquad\qquad \|x\| = \max_{0 \le |\beta| \le k} \|D^\beta x\|_\infty .$$

- $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{x\colon \Omega \to \mathbb{K} \mid \; x \in C^k(\overline{\Omega}) \text{ e } \forall \beta, |\beta| = k : \; D^\beta x \in Lip(\Omega)\}$ con, per esempio, una delle seguenti due norme equivalenti
$$\|x\| = \sum_{0 \le |\beta| \le k} \|D^\beta x\|_\infty + \sum_{|\beta| = k} \Lambda(D^\beta x)$$
$$\|x\| = \max\big\{ \max_{0 \le |\beta| \le k} \|D^\beta x\|_\infty \, , \, \max_{|\beta| = k} \Lambda(D^\beta x) \big\}.$$

Spazi di Sobolev. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $k \ge 1$ intero, $1 \le p < +\infty$.
Se u è una funzione di classe $C^k(\Omega)$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ ha supporto compatto (cioè, esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\varphi \equiv 0$ su $\Omega \setminus K$), allora una semplice integrazione per parti implica, essendo φ nulla su $\partial\Omega$, $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t_1} \varphi = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}$.
Ripetendo lo stesso ragionamento si ottiene,
$$\int_\Omega (D^\beta u)\, \varphi = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u\, (D^\beta \varphi).$$
Ciò giustifica la seguente definizione che generalizza quella classica.
Siano $u, v\colon \Omega \to \mathbb{K}$ funzioni misurabili e integrabili (secondo Lebesgue) su ogni compatto $K \in \Omega$. Sia β un multiindice. Diciamo che $v = D^\beta u$ in senso generalizzato (in senso distribuzionale) su Ω *se per ogni funzione $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto in Ω si ha*
$$\int_\Omega v\, \varphi = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u\, (D^\beta \varphi) \; .$$

Non è difficile dimostrare che la derivata generalizzata, se esiste, è unica (a meno di uguaglianza q.o.) e quindi coincide con la derivata classica se quest'ultima esiste.

- $W^k_p(\Omega) = \{x \in L^p(\Omega) \mid \; \forall \beta, |\beta| \le k : \; D^\beta x \text{ (d.generalizz.)} \in L_p(\Omega)\}$ con la norma
$$\|x\|_{k,p} = \left(\sum_{0 \le |\beta| \le k} \int_\Omega |D^\beta x|^p \right)^{1/p}.$$
- $W^k_\infty(\Omega) = \{x \in L^\infty(\Omega) \mid \; \forall \beta, |\beta| \le k : \; D^\beta x \text{ (d.generalizz.)} \in L_\infty(\Omega)\}$ con la norma
$$\|x\|_{k,\infty} = \max_{0 \le |\beta| \le k} \|D^\beta x\|_\infty.$$

Per $p \neq \infty$, lo spazio $W^k_p(\Omega)$ coincide (cioè, è isometricamente isomorfo) con il completamento dello spazio $\{x \in C^k(\Omega) \mid \; \|x\|_{k,p} < +\infty\}$ nella norma $\| \cdot \|_{k,p}$.

Per alcuni tipi di aperti, ad esempio per tutti gli aperti convessi limitati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, lo spazio $W_p^k(\Omega)$ (sempre per $p \neq \infty$) coincide con il completamento dello spazio normato $(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{k,p})$. (Per maggiori informazioni si veda il libro *R. A. Adams: Sobolev Spaces.*)

Spazi di successioni. Essendo successioni, in realtà, delle funzioni, gli spazi di successioni possono essere visti come casi particolari di spazi di funzioni. Per un qualunque insieme Γ possiamo considerare la misura ν che "conta gli elementi dei sottoinsiemi" (misura aritmetica o contatrice), definita sull'insieme $\mathcal{P}(\Gamma)$ delle parti di Γ come segue:

$$\nu(E) = \begin{cases} \text{il numero degli elementi di } E & \text{se } E \subset \Gamma \text{ è finito;} \\ +\infty & \text{se } E \subset \Gamma \text{ è infinito.} \end{cases}$$

Sia $0 < p < +\infty$.

- $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N}) = B(\mathbb{N})$ (v. sopra).
- $\ell_p = L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n |x(n)|^p < +\infty\}$ con:
  – se $1 \leq p < +\infty$, la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$;
  – se $0 < p < 1$, la metrica $d_p(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p$.
- $\ell_0 = s = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (l'insieme di tutte le successioni in $\mathbb{K}$) con la metrica $d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}$.
  Non è difficile mostrare che la convergenza in questa metrica è equivalente alla convergenza puntuale (cioè, per coordinate) e che lo stesso vale anche se, nella definizione della d, sostituiamo $\{2^{-n}\}$ con una qualsiasi successione $\{a_n\} \subset (0, +\infty)$ tale che $\sum a_n < +\infty$. Sostituendo così i coefficienti, otteniamo una metrica diversa, non necessariamente equivalente alla metrica d, ma generante la stessa topologia (della convergenza per coordinate) su ℓ_0.
- $c = \{x = (x_n) \mid \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ esiste in } \mathbb{K}\}$ con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
  Lo spazio c coincide (cioè, è isometrico) con lo spazio $C(K)$
  – per $K = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (*one-point compactification* di $\mathbb{N}$),
  – oppure per $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ (con la topologia euclidea).
- $c_0 = \{x = (x_n) \mid x_n \to 0\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. (Si osservi che, in questo caso, il "sup" nella definizione di questa norma è in realtà "max".)

Gli spazi c_0 e ℓ_p $(0 < p < +\infty)$ possono essere generalizzati sostituendo $\mathbb{N}$ con un insieme Γ non numerabile. (Per Γ finito otteniamo soltanto vari rinormamenti di $\mathbb{R}^n$ dove $n = \operatorname{card}\Gamma$.) Per una funzione $u\colon \Gamma \to \mathbb{K}$ poniamo

$$\operatorname{spt}(u) = \{\gamma \in \Gamma \mid u(\gamma) \neq 0\} \qquad \text{(il supporto di } u\text{)}.$$

- $\ell_p(\Gamma) = L_p(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), \nu)$. Siccome, per ogni funzione integrabile rispetto a una misura, l'insieme dei punti in cui la funzione non si annulla è sempre di misura σ-finita, possiamo scrivere
$\ell_p(\Gamma) = \{x\colon \Gamma \to \mathbb{K} \mid \operatorname{spt}(x) \text{ numerabile}, \sum_{\gamma \in \operatorname{spt}(x)} |x(\gamma)|^p < +\infty\}$ e
  - se $1 \leq p < +\infty$, $\|x\|_p = \big(\sum_{\gamma \in \operatorname{spt}(x)} |x(\gamma)|^p\big)^{1/p}$;
  - se $0 < p < 1$, $d_p(x, y) = \sum_{\gamma \in \operatorname{spt}(x) \cup \operatorname{spt}(y)} |x(\gamma) - y(\gamma)|^p$.
- $c_0(\Gamma) = \{x\colon \Gamma \to \mathbb{K} \mid \forall \varepsilon > 0 : \operatorname{card}\{\gamma : |\mathrm{x}(\gamma)| \geq \varepsilon\} < \infty\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. È facile vedere che ogni $x \in c_0(\Gamma)$ ha supporto (al più) numerabile, per cui
$c_0(\Gamma) = \{x\colon \Gamma \to \mathbb{K} \mid \exists \{\gamma_n\} \subset \Gamma : \lim x(\gamma_n) = 0,\ x(\gamma) = 0\ \forall \gamma \notin \{\gamma_n\}\}$.

2. Proprietà di base

In quanto segue, se non specificato altrimenti, useremo le seguenti notazioni:
Γ ... un insieme non numerabile;
K ... uno spazio topologico compatto di Hausdorff;
E ... un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue;
Ω ... un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$;
μ ... una misura nonnegativa;
$1 < p < +\infty$.

Completezza. Tutti gli spazi introdotti nella sezione precedente sono completi.

Separabilità.

Sono separabili: c_0, c, ℓ_p, ℓ_1, $L_p(E)$, $L_1(E)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $W^k_p(\Omega)$.

$C(K)$ è separabile se e solo se K è metrizzabile.

Non sono separabili: ℓ_∞, $\ell_p(\Gamma)$, $\ell_1(\Gamma)$, $c_0(\Gamma)$, $L_\infty(E)$ se $m(E) > 0$.

Esercizio. Dimostrare che $C_b(0,1)$ non è separabile.
(Suggerimento: mostrare che $C_b(0,1)$ contiene un sottospazio isometrico a ℓ_∞ : far corrispondere al vettore $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots) \in \ell_\infty$ una funzione $u_n \in C_b(0,1)$ tale che $\operatorname{spt}(u_n) \subset (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $\|u_n\|_\infty = 1$ e $u_n \geq 0$.)

Struttura hilbertiana.

Gli spazi $L_2(\mu)$ (e quindi anche ℓ_2, $\ell_2(\Gamma)$) e $W_2^k(\Omega)$ (per un aperto qualsiasi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) sono spazi di Hilbert con il prodotto scalare rispettivamente:
$\langle x, y\rangle = \int x\,\overline{y}\,d\mu$ e $\langle x, y\rangle = \sum_{0\le|\beta|\le k} \int_\Omega D^\beta x\,\overline{D^\beta y}$.

Riflessività.

Sono riflessivi: $L_p(\mu)$ (e quindi anche ℓ_p, $\ell_p(\Gamma)$), $W_p^k(\Omega)$ per un qualsiasi aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Nessuno degli altri spazi considerati è riflessivo, se non è finito dimensionale.

Il duale dello spazio. Il segno "=" vuol dire "essere isometrico a". In ognuno dei casi sottoelencati, è importante conoscere anche la forma concreta dell'isometria, che qui omettiamo per motivi di brevità.

- $(c_0)^* = \ell_1$;
- $c^* = \ell_1$;
- $L_1(\mu)^* = L_\infty(\mu)$ se μ è σ-finita (e quindi $(\ell_1)^* = \ell_\infty$);
- $\ell_1(\Gamma)^* = \ell_\infty(\Gamma)$;
- $L_p(\mu)^* = L_q(\mu)$ dove $(1/p) + (1/q) = 1$ (e quindi lo stesso per $(\ell_p)^*$ e $\ell_p(\Gamma)^*$);
- $C(K)^* = \mathcal{M}(K)$ =le misure boreliane regolari su K a valori in $\mathbb{K}$;
- $C[0,1]^* = BV_0[0,1] = \{v\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid v \text{ ha var. limitata, } v(0) = 0\}$;
- $W_2^k(\Omega)^* = W_2^k(\Omega)$ (per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) perché è di Hilbert.
- $L_p[0,1]^* = \{0\}$ se $0 \le p < 1$.

Si noti che $(\ell_\infty)^* \ne \ell_1$, $L_\infty(E)^* \ne L_1(E)$ se $m(E) > 0$.

Essere (isometrico a uno spazio) duale.

Sono spazi duali: ℓ_1, $\ell_1(\Gamma)$, $L_\infty(\mu)$ se μ è σ-finita (e quindi ℓ_∞), $\ell_\infty(\Gamma)$, e gli spazi riflessivi di cui sopra.

Non sono duali: c_0, c, $C[0,1]$, $L_1(E)$ se $m(E) > 0$.

Alcune proprietà particolari.

- Ogni spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita è isometrico allo spazio ℓ_2.
  Più in generale: sia H uno spazio di Hilbert ∞-dimensionale, sia $\mathrm{dens}(H)$ la più piccola cardinalità di un insieme denso in H (il cosidetto "carattere di densità" che esiste per ogni spazio topologico); allora H è isometrico a $\ell_2(\Gamma)$ dove $\mathrm{card}(\Gamma) = \mathrm{dens}(H)$.
- *ℓ_1 ha la proprietà di Schur: ogni successione che converge debolmente converge anche nella norma* (Schur).
  (Esercizio: dedurre che tutti gli spazi $\ell_1(\Gamma)$ hanno la proprietà di Schur.)
- *c_0 non è complementato in ℓ_∞* (Sobczyk, Phillips).
- *Per ogni insieme Γ, $\ell_\infty(\Gamma)$ ha la "Hahn–Banach extension property": ogni operatore continuo lineare da un sottospazio di uno spazio normato a valori in $\ell_\infty(\Gamma)$ ammette un'estensione continua lineare a tutto lo spazio con la stessa norma.* (Facile esercizio su Hahn–Banach: agire per coordinate.)
- *c_0 ha la seguente proprietà di estensione: ogni operatore continuo lineare da un sottospazio di uno spazio normato* separabile *a valori in c_0 ammette una estensione continua lineare a tutto lo spazio con la norma al più raddoppiata* (Sobczyk). La parola "separabile" non può essere omessa.
- *Ogni spazio normato separabile è linearmente isometrico ad un sottospazio di $C[0,1]$* (Banach-Mazur).
- *Ogni spazio normato separabile è linearmente isometrico ad un sottospazio di ℓ_∞.* (Esercizio: sia $\{u_n\}$ densa in X; per ogni n, sia $f_n \in X^*$ tale che $\|f_n\| = 1$ e $f_n(u_n) = \|u_n\|$; considerare l'applicazione $x \mapsto (f_n(x))_{n=1}^\infty$.)
  (Un altro esercizio: formulare e dimostrare un risultato analogo per spazi normati di qualsiasi carattere di densità.)
- *Ogni spazio separabile di Banach X è isometrico ad un quoziente di ℓ_1, cioè esiste un sottospazio chiuso $V \subset \ell_1$ tale che X e ℓ_1/V sono isometrici* (Banach–Mazur).
- *Ogni spazio metrico M è isometrico ad un sottoinsieme di $C_b(M)$.* (Facile esercizio: fissare un punto $m_0 \in M$ e considerare l'applicazione che ad ogni $m \in M$ associa la funzione $x_m(t) = d(t,m) - d(t,m_0)$.)
- *Ogni spazio metrico separabile è isometrico ad un sottoinsieme di ℓ_∞.* (Esercizio: utilizzare il punto precedente.)