CONTENUTO INDICATIVO DELLE LEZIONI SVOLTE
Analisi Matematica 1, 2007-2008, L. Vesely

Questo testo contiene soltanto un elenco non dettagliato di ciò che è stato fatto in aula. Esso non rappresenta appunti e, in ogni caso, non è sufficiente per la preparazione all'esame.
Le dimostrazioni richieste per l'esame sono segnate con un triangolo.

26.09.2007 [1 ora]

Presentazione del corso.

27.09.2007 [2 ore]

Insiemi numerici:
- $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (l'insieme dei numeri *naturali*), $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ (l'insieme dei *naturali con lo zero*)
- $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (l'insieme degli *interi (relativi)*)
- $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}\}$ (l'insieme dei numeri *razionali*)
- $\mathbf{R}$ (l'insieme dei numeri *reali*)

Ovviamente abbiamo le seguenti inclusioni: $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Definizione. Un insieme X con una relazione binaria "$\leq$" viene chiamato *insieme totalmente ordinato* se, per ogni $x, y, z \in X$ si ha:
a) $x \leq x$ (riflessività)
b) $x \leq y\,,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitività)
c) $x \leq y\,,\ y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetria)
d) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (ogni due elementi di X sono comparabili).

Un insieme X che soddisfa soltanto le proprietà a), b), c) viene chiamato *parzialmente ordinato.*

Scriviamo $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.

Gli insiemi $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, con l'ordinamento standard, sono insiemi totalmente ordinati.

L'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali è chiuso rispetto alle operazioni algebriche $+$, $-$, $\cdot$ (moltiplicazione), : (divisione per un numero non nullo) ed esse "sono d'accordo" (in modo solito) con la relazione $\leq$ (per es., $x \leq y \Rightarrow x + c \leq y + c$): $\mathbf{Q}$ è un *campo ordinato.*

Cenni su NUMERI REALI

Chiamiamo *sviluppo decimale* una qualsiasi sequenza (infinita) del tipo

$$\pm\, n, c_1c_2c_3\ldots \qquad \text{che non finisca con } \overline{9} \text{ (9 periodico)},$$

dove $n \in \mathbf{N}_0$ e $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (cioè, c_i sono cifre), con l'eccezione di $-0,\overline{0} = +0,\overline{0} = 0,\overline{0}$ che denotiamo semplicemente con 0.

- Ad ogni numero razionale può essere associato il suo sviluppo decimale; esso è periodico. E vice versa, ogni sviluppo decimale periodico proviene da un numero razionale. Possiamo quindi identificare l'insieme $\mathbf{Q}$ con l'insieme $\mathcal{P}$ degli sviluppi decimali periodici.

Definizione. Chiamiamo *numero reale* un qualsiasi sviluppo decimale (periodico o non). Denotiamo con $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali.

- È possibile definire in modo naturale una relazione d'ordine su $\mathbf{R}$, procedendo come segue.
  È ovvio come definire "$x = 0$", "$x < 0$", "$x > 0$".
  Se $x < 0$ e $y \geq 0$, diremo che $x < y$.
  Siano $x > 0$, $y > 0$ due numeri reali distinti. Denotando $x = x_0{,}x_1x_2x_3\ldots$, $y = y_0{,}y_1y_2y_3\ldots$, sia $k \in \mathbf{N}_0$ il minimo indice tale che $x_k \neq y_k$. Se $x_k < y_k$, diremo che $x < y$; se $x_k > y_k$, diremo che $x > y$. (Questo è l'ordine "lessicografico", come quello dei dizionari.)
  Siano $x < 0$, $y < 0$ due numeri reali distinti. Diremo che $x < y$ se e solo se $-x > -y$ (e ciò è già stato definito).

Definizione. Siano X un insieme totalmente ordinato (per esempio $X = \mathbf{R}$), $E \subseteq X$, $x_0 \in X$.
a) x_0 è un *maggiorante* di E $\equiv$ $x_0 \geq x\ \forall x \in E$ (analogamente: minorante);
b) E è *limitato superiormente* $\equiv$ E ammette maggiorante (analogamente: limitato inferiormente);
c) E è *limitato* $\equiv$ E è limitato sia superiormente sia inferiormente;
d) $x_0 = \max E$ $\equiv$ $x_0 \in E$ e x_0 è un maggiorante per E (analogamente si definisce $x_0 = \min E$);
e) $x_0 = \sup E$ (*estremo superiore* di E) $\equiv$ x_0 è il minimo maggiorante di E (analogamente: estremo inferiore, denotato con $\inf E$).

Teorema 1. *$\mathbf{R}$ ha la seguente* **proprietà dell'estremo superiore***: ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente di $\mathbf{R}$ ammette estremo superiore in $\mathbf{R}$.* (E quindi anche: ogni sottoinsieme non vuoto limitato inferiormente ammette estremo inferiore.)

Per una dimostrazione si veda il file *Proprietà dell'estremo superiore di* $\mathbf{R}$.

Definizione. Chiamiamo *intervallo* un qualsiasi insieme $I \subseteq \mathbf{R}$ che soddisfi l'implicazione

$$x, y \in I,\ z \in \mathbf{R},\ x \leq z \leq y \quad \Rightarrow \quad z \in I$$

(cioè, con ogni due suoi elementi, I contiene anche tutti i numeri reali compresi –in senso dell'ordine– tra essi).

Notazione. Useremo la seguente notazione:
$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$, eccetera.

Diamo ora un elenco di tutti i possibili **tipi di intervalli**; in ciò che segue, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.
1) intervalli *aperti limitati*: (a, b), $\emptyset$;
2) intervalli *aperti illimitati*: $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $\mathbf{R}$;
3) intervalli *chiusi limitati*: $[a, b]$, $\{a\}$, $\emptyset$;
4) intervalli *chiusi illimitati*: $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $\mathbf{R}$;
5) intervalli *semiaperti* (sono sempre limitati): $[a, b)$, $(a, b]$.

03.10.2007 [1 ora]

Esempi.
1) $E = \mathbf{R}$ non ammette massimo, né maggioranti, né estremo superiore in $\mathbf{R}$.
2) $E = \emptyset$ non ammette massimo, né estremo superiore in $\mathbf{R}$; ogni numero reale è maggiorante per $\emptyset$.
3) $E = [-2, 1)$ non ammette massimo, l'insieme dei suoi maggioranti è $[1, +\infty)$, $\sup E = 1$, $\min E = \inf E = -2$.
4) $E = \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ non ammette minimo, ma $\inf E = 0$; inoltre $\max E = \sup E = 1$.

Osservazione. *Siano $E \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Allora $x_0 = \sup E$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni:*
(a) $\forall x \in E$: $x \leq x_0$ (cioè, x_0 è un maggiorante per E),
(b) $\forall z < x_0$ $\exists x \in E$: $x > z$ (cioè, nessun numero minore di x_0 è maggiorante).
La condizione (b) può essere scritta nella seguente forma equivalente:
(b') $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in E$: $x > x_0 - \varepsilon$.

Lemma (densità dei razionali e degli irrazionali in $\mathbf{R}$). *Ogni intervallo aperto non vuoto interseca sia $\mathbf{Q}$ sia $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.*

△ **Teorema 2** (completezza di $\mathbf{R}$). *Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbf{R}$ tali che, per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$, $a \leq b$. Allora esiste $x \in \mathbf{R}$ (*elemento separatore*) tale che*

$$a \leq x \leq b \qquad \text{per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

[Dimostrato.]

△ **Teorema 3** (principio di Cantor di intervalli compatti inscatolati). *Siano $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ (infiniti) intervalli chiusi, limitati e non vuoti in $\mathbf{R}$. Allora essi hanno in comune almeno un numero reale; in altre parole: $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n \neq \emptyset$.* [Dimostrato.]

Osservazione. *Nel Teorema 3 non possiamo omettere la parola "limitati" (si consideri gli intervalli $I_n = [n, +\infty)$), né la parola "chiusi" (si consideri $I_n = (0, \frac{1}{n})$).*

<u>**04.10.2007**</u> [2 ore]

Esercizio. *Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbf{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Allora* $\sup A \leq \inf B$.

- *Numeri reali estesi*: $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
  Definiamo $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. In questo modo, $\overline{\mathbf{R}}$ è totalmente ordinato.
  Ciò giustifica le seguenti convenzioni:
  - $\sup E = +\infty$ se $E \subseteq \mathbf{R}$ è illimitato superiormente;
  - $\inf E = -\infty$ se $E \subseteq \mathbf{R}$ è illimitato inferiormente;
  - $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

N.B.: I simboli $\pm\infty$ non sono numeri reali! L'insieme vuoto è l'unico insieme con l'estremo superiore minore dell'estremo inferiore.

– – –

Usando la proprietà del "sup", è possibile definire in modo opportuno le *operazioni algebriche* $(+, -, \cdot, :)$ su $\mathbf{R}$, che estendano quelle su $\mathbf{Q}$. Con tali operazioni e con la relazione d'ordine, $\mathbf{R}$ è un **campo ordinato con la proprietà dell'estremo superiore**.

È possibile dimostrare che, *a meno di isomorfismi*, $\mathbf{R}$ *è l'unico campo ordinato con la proprietà del "sup"*. Più precisamente, se X è un qualsiasi campo ord. con la prop. del "sup", allora esiste una corrispondenza biunivoca $\varphi: X \to \mathbf{R}$ che rispetti l'ordine e le operazioni algebriche (*isomorfismo*, appunto).

Teorema 4 (esistenza di radici n-esime). $\forall x \in [0, +\infty)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists! y \in [0, +\infty)$: $x^n = y$.

NUMERI COMPLESSI

Alcune equazioni quadratiche, per es. $x^2 + 1 = 0$, non hanno soluzioni in $\mathbf{R}$.

Se vogliamo che tutte le equazioni quadratiche $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) abbiano soluzioni anche quando $D := b^2 - 4ac < 0$, dobbiamo considerare ammissibili le espressioni del tipo

$$\frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2a}\sqrt{-1} = x + y\sqrt{-1}$$

dove $x, y \in \mathbf{R}$.

Definizione. Chiamiamo *numero complesso* ogni espressione del tipo $x + iy$ dove $x, y \in \mathbf{R}$. Denotiamo con $\mathbf{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

La somma, la differenza e il prodotto di due numeri complessi sono definiti in modo naturale con l'aggiunzione della regola $i^2 = -1$. Il quoziente:

$$\frac{x+iy}{u+iv} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{u^2-(iv)^2} = \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$$

Con queste operazioni algebriche, **$\mathbf{C}$ è un campo**.

Si può dimostrare che *non esiste alcuna relazione di ordine su* $\mathbf{C}$ *che lo renda un campo ordinato* (cioè non vi sono relazioni d'ordine che vadano d'accordo con le operazioni algebriche).

- $z = x + iy$ (*forma algebrica* di z); $\mathrm{Re}(z) = x$ (*parte reale*); $\mathrm{Im}(z) = y$ (*parte immaginaria*); $\overline{z} = x - iy$ (*coniugato*).
- $z = (x, y)$ (*forma vettoriale* di z); $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (*modulo*); significato geometrico della somma e del multiplo reale.
- Disuguaglianze triangolari: $\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$.
- $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r \cdot u_\alpha$ (*forma trigonometrica* o *polare* di $z \neq 0$) dove $r > 0$ e α è l'angolo orientato determinato dalla parte positiva dell'asse reale e il vettore z; $\arg(z) = \alpha$ (*argomento*) (più preciso sarebbe $\arg(z) = \{\alpha + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$).
- significato geometrico: moltiplicare un numero complesso z per una "unità complessa" u_α significa ruotare z attorno all'origine di un angolo orientato pari ad α.

Teorema 5. [dimostrato]

1. $(r \cdot u_\alpha)(\rho \cdot u_\beta) = r\rho \cdot u_{\alpha+\beta}$.
2. **[formula di De Moivre]** $(r \cdot u_\alpha)^n = r^n \cdot u_{n\alpha}$ *per ogni* $z \in \mathbf{Z}$.
3. **[le radici n-esime]** *Per ogni* $n \in \mathbf{N}$, *l'equazione* $z^n = r \cdot u_\alpha$ *ha esattamente* n *soluzioni complesse distinte. Nel piano complesso, le soluzioni formano i vertici di un poligono regolare di* n *lati, centrato nell'origine. Esse possono essere calcolate come segue:*
   $z = \sqrt[n]{r} \cdot u_\varphi$ *dove* $\varphi = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

<u>**10.10.2007**</u> [1 ora]

Esempi.

a) Detrerminare la forma algebrica di: $\frac{1}{i}$, i^{2007}, $(1 + i\sqrt{3})^{100}$.
b) Determinare le radici quarte di $1 + i\sqrt{3}$.

- *Forma esponenziale di un numero complesso.*
  Per $\varphi \in \mathbf{R}$, definiamo $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Allora, un numero complesso $z = r \cdot u_\varphi$ $(r > 0)$ può essere scritto nella cosiddetta *forma esponenziale*: $z = r\,e^{i\varphi}$ (che è solo una notazione alternativa per scrivere la forma trigonometrica).

  Dalla definizione di $e^{i\varphi}$ è facile dedurre le seguenti *formule di Eulero*:
  $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, $\quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$.

  Ora è possibile estendere la funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$, a una funzione $g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ in modo naturale come segue:

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b) \qquad (a, b \in \mathbf{R}).$$

(Vedrete in Analisi Matematica II che $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e in Analisi Complessa che $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ per ogni $z \in \mathbf{C}$ [la stessa formula!].)

Esercizi.

- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w}$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zw| = |z| \cdot |w|$
- $|z/w| = |z|/|w|$

Teorema 6 (teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio non costante ammette almeno una radice in* $\mathbf{C}$*. Più precisamente, se* P *è un polinomio (a coefficienti complessi) di grado* $n > 0$*, allora esistono* $c, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{C}$ *tali che* $c \neq 0$ *e* $P(z) = c(z - w_1) \cdots (z - w_n)$ *per ogni* $z \in \mathbf{C}$.

Problemino (per domani)**.** Dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli intervalli (reali) $[0, 1]$ e $(0, 1]$.

<u>11.10.2007</u> [2 ore]

Insiemi equipotenti. Insiemi numerabili

Definizione. Siano X, Y due insiemi.

a) X e Y sono *equipotenti* se esiste una corrispondenza biunivoca $f: X \to Y$. Notazione: $X \sim Y$ oppure $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$.

b) $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ se X è equipotente ad un sottoinsieme di Y (equivalentemente: se esiste una funzione iniettiva $f: X \to Y$).

c) $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$ se $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ e $X \not\sim Y$.

Osservazione. *"$\sim$" è una relazione di equivalenza.*

Seguono due teoremi non banali. Il primo viene chiamato *teorema di Cantor-Bernstein*, mentre il secondo è collegato al cosiddetto *assioma della scelta* nella Teoria degli Insiemi.

Teorema 7. $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(X) \Longrightarrow \mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$.
(In altre parole, se esistono funzioni iniettive $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$, allora esiste una funzione biunivoca $h: X \to Y$.)

Teorema 8. *Per ogni due insiemi* X, Y *è vera una (e una sola) delle seguenti tre possibilità:*

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y), \qquad \mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y), \qquad \mathrm{card}(X) > \mathrm{card}(Y).$$

(In altre parole, le cardinalità di due insiemi sono sempre confrontabili.)

Definizione. X viene chiamato *numerabile* se $X \sim \mathbf{N}$. Diciamo che X è *al più numerabile* se X è finito o numerabile (tale terminologia è giustificata dalla seguente proprietà).

- *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.* (In particolare, la cardinalità del numerabile è la più piccola cardinalità infinita.)

$\triangle$ **Esempi.** I seguenti insiemi sono numerabili: $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{N}^k = \mathbf{N} \times \cdots \times \mathbf{N}$ (k volte, $k \in \mathbf{N}$), $\mathbf{Q}$. [Dimostrato.]

- *Per ogni* $k \in \mathbf{N}$*, il prodotto cartesiano* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$*, dove gli insiemi* A_i *sono al più numerabili, è al più numerabile.*

- *L'unione di una famiglia al più numerabile di insiemi al più numerabili è al più numerabile.* (In "matematichese": se J è un insieme al più numerabile e ogni insieme A_j ($j \in J$) è al più numerabile, allora anche l'unione $\bigcup_{j\in J} A_j$ è al più numerabile.)

$\triangle$ **Teorema 9.** *Se X è infinito e A è al più numerabile, allora $X \cup A \sim X$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $A \cap X = \emptyset$ (altrimenti consideriamo $A \setminus X$ al posto di A). Sappiamo che X contiene un sottoinsieme numerabile B e che tale insieme soddisfa $B \cup A \sim B$. Di conseguenza (perché le seguenti sono unioni di insiemi disgiunti) abbiamo $X \cup A = \big[(X \setminus B) \cup B\big] \cup A = (X \setminus B) \cup (B \cup A) \sim (X \setminus B) \cup B = X$. *q.e.d.*

Corollario.
1) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \sim \mathbf{R}$.
2) *Ogni insieme infinito è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. (E solo gli insiemi infiniti hanno questa proprietà.)*

$\triangle$ **Teorema 10.** *L'intervallo $(0,1)$ non è numerabile. (E quindi $\mathbf{R}$ non è numerabile.)* [Dimostrato.]

Definizione. Diciamo che un insieme X ha la *cardinalità del continuo* se $X \sim \mathbf{R}$.

Teorema 11. *I seguenti insiemi hanno la cardinalità del continuo: $\mathbf{R}^k$ ($k \in \mathbf{N}$), $\mathbf{C}$, (a,b) ($a < b$), $[a,b)$, $[a,b]$, $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ (le parti di $\mathbf{N}$).*

$\triangle$ **Teorema 12.** *Per ogni insieme X,* $\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(\mathcal{P}(X))$. [Dimostrato.]

Dimostrazione. La funzione $X \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ è iniettiva per cui $\operatorname{card}(X) \le \operatorname{card}(\mathcal{P}(X))$. Rimane da dimostrare che $X \not\sim \mathcal{P}(X)$.
Procedendo per assurdo, supponiamo che esista una funzione biunivoca $g\colon X \to \mathcal{P}(X)$. L'insieme

$$E := \{x \in X : x \notin g(x)\}$$

è un elemento di $\mathcal{P}(X)$. Perciò esiste $y \in X$ tale che $g(y) = E$. Si ottiene

$$y \in E \;\Leftrightarrow\; y \notin g(y) \;\Leftrightarrow\; y \notin E,$$

una contraddizione. *q.e.d.*

Esempi di applicazioni.
1) L'insieme $\mathcal{P}_f(\mathbf{N})$ delle *parti finite* di $\mathbf{N}$ è numerabile. [Dimostrato.] Di conseguenza, l'insieme $\mathcal{P}_\infty(\mathbf{N})$ delle *parti infinite* di $\mathbf{N}$ ha la cardinalità del continuo, in quanto $\mathbf{R} \sim \mathcal{P}(\mathbf{N}) = \mathcal{P}_f(\mathbf{N}) \cup \mathcal{P}_\infty(\mathbf{N}) \sim \mathcal{P}_\infty(\mathbf{N})$.
2) L'insieme P di tutti i polinomi a coefficienti interi è numerabile. [Dimostrato.]

<u>**17.10.2007**</u> [1 ora]

3) Chiamiamo *algebrico* ogni numero reale che sia radice di un polinomio non costante a coefficienti interi; denotiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme dei numeri algebrici.
   - Ogni numero razionale è algebrico (infatti, $x = m/n$ è radice del polinomio $nx - m$), come lo è anche $\sqrt{2}$ (radice del polinomio $x^2 - 2$) e, più in generale, ogni numero del tipo $x = q^r$ con $q, r \in \mathbf{Q}$ *(perché?)*.
   - I numeri reali non algebrici, cioè gli elementi di $\mathbf{R} \setminus \mathcal{A}$, vengono chiamati *numeri trascendenti.* Il fatto che esistano numeri trascendenti segue dal seguente corollario di 2) (v. sopra):
   - *L'insieme $\mathcal{A}$ è numerabile.* Di conseguenza $\mathbf{R} \sim \mathbf{R} \setminus \mathcal{A}$.
   - È noto, ma difficile da dimostrare, che i numeri π, e sono trascendenti. (Più avanti nel corso dimostreremo soltanto che e è irrazionale.)

Intorni, insiemi aperti, insiemi chiusi

Definizione. Sia $p \in \overline{\mathbf{R}}$. Chiamiamo *intorno di p*:
- se $p \in \mathbf{R}$, ogni intervallo aperto contenente p (cioè, ogni intervallo del tipo (a, b) dove $-\infty \leq a < x < b \leq +\infty$);
- se $p = +\infty$, ogni intervallo aperto $I \subseteq \mathbf{R}$ t.che $\sup I = +\infty$ (cioè, ogni intervallo del tipo $(a, +\infty)$ con $-\infty \leq a < +\infty$);
- se $p = -\infty$, ogni intervallo aperto $I \subseteq \mathbf{R}$ t.che $\inf I = -\infty$ (cioè, $(-\infty, a)$ con $-\infty < a \leq +\infty$).

Denotiamo con $\mathcal{U}(p)$ l'insieme di tutti gli intorni di p.

Esercizio. Le unioni (qualsiasi) di intorni di p sono intorni di p. Le intersezioni finite di intorni di p sono intorni di p.

N.B. che la parola "finite" non può essere omessa: si consideri la famiglia (numerabile) $\{(-1/n, 1/n) : n \in \mathbf{N}\}$ di intorni di 0.

Definizione. Un insieme $E \subseteq \mathbf{R}$ viene chiamato:
- *aperto* se con ogni suo elemento l'insieme E contiene anche tutto un intorno di quell'elemento (cioè, se $\forall x \in E\ \exists U \in \mathcal{U}(x)$: $U \subseteq E$);
- *chiuso* se il suo complementare $\mathbf{R} \setminus E$ è aperto (cioè, se $\forall x \in \mathbf{R} \setminus E\ \exists U \in \mathcal{U}(x)$: $U \cap E = \emptyset$).

Esercizio.
1) Le unioni (qualsiasi) di aperti sono insiemi aperti. Le intersezioni finite di aperti sono insiemi aperti.
2) Le intersezioni (qualsiasi) di chiusi sono insiemi chiusi. Le unioni finite di chiusi sono insiemi chiusi.

È facile vedere che gli intervalli aperti/chiusi sono insiemi aperti/chiusi. Esistono insiemi né aperti né chiusi: ad esempio, l'intervallo $(0, 1]$. Gli insiemi $\mathbf{R}$ e $\emptyset$ sono sia aperti sia chiusi. Vale il seguente teorema (che non dimostriamo).

Teorema 13. *Gli insiemi* $\mathbf{R}$ *e* $\emptyset$ *sono gli unici sottoinsiemi di* $\mathbf{R}$ *che siano contemporaneamente chiusi e aperti.*

Problemino. *Sia* $\mathcal{F}$ *una famiglia di intervalli aperti, non vuoti, mutuamente disgiunti in* $\mathbf{R}$. *Allora* $\mathcal{F}$ *è al più numerabile.*

Usando l'affermazione del *Problemino*, si può dimostrare (anche se non lo facciamo) la seguente caratterizzazione degli insiemi aperti in $\mathbf{R}$.

Teorema 14. *Un insieme* $E \subseteq \mathbf{R}$ *è aperto se e solo se* E *è l'unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti.*

<u>**18.10.2007**</u> [2 ore]

Successioni, sottosuccessioni, proprietà valide definitivamente

Iniziamo con una spiegazione intuitiva dei termini "successione" e "sottosuccessione". Possiamo immaginare una successione di elementi di un insieme X come una sequenza infinita

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

dove gli x_n sono elementi di X, non necessariamente distinti tra loro. Possiamo ottenere una sottosuccessione di tale successione, procedendo come segue: fissiamo un insieme infinito $A \subset \mathbf{N}$, ordiniamo i suoi elementi in modo crescente:

$$A = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\}$$

e formiamo una successione utilizzando soltanto gli indici appartenenti all'insieme A:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots .$$

Quest'ultima successione è una sottosuccessione della successione iniziale.

Ora siamo pronti per le definizioni formali di successione e sottosuccessione.

Definizione. Chiamiamo *successione di elementi di* X (o *successione in* X) ogni funzione $f\colon \mathbf{N} \to X$. Se poniamo $x_n := f(n)$, possiamo denotare la successione con i seguenti simboli: $\{x_n\}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Notazione. Scriveremo brevemente "$\{x_n\} \subset X$" al posto di "$\{x_n\}$ è una successione in X".

Definizione. Sia $\{x_n\} \subset X$ una successione. Una *sottosuccessione di* $\{x_n\}$ è una successione $\{y_k\}$ tale che esista una successione crescente $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ di elementi di $\mathbf{N}$ (indici) t.che $y_k = x_{n_k}$ per ogni $k \in \mathbf{N}$.

In termini di funzioni, se $x_n = f(n)$ ($f\colon \mathbf{N} \to X$), $n_k = h(k)$ ($h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ crescente), $y_k = g(k)$ ($g\colon \mathbf{N} \to X$), allora $y_k = x_{n_k}$ equivale a $g(k) = f(h(k))$. Di conseguenza: $g\colon \mathbf{N} \to X$ definisce una sottosuccessione di $f\colon \mathbf{N} \to X$ se e solo se esiste una funzione crescente $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ t.che $g = f \circ h$ (cioè, $g(k) = f(h(k))$ per ogni $k \in \mathbf{N}$).

Esempi.
- $\{I_n\}$, dove $I_n = (n+2, n^2-1]$, è una successione di intervalli
- $\{0, 0, 0, 0, 0, \ldots\}$ è una successione (costante) di numeri
- $\{A, B, A, B, A, B, \ldots\}$ è una sottosuccessione della successione $\{A, B, A, A, B, B, A, A, A, B, B, B, \ldots\}$
- $\{2n\}$ è una sottosuccessione di $\{(-1)^n n\}$
- Ogni successione è una sottosuccessione di se stessa.

Definizione. Sia $\mathcal{P}$ una proprietà che possono avere gli elementi di X. Diciamo che x_n *ha* $\mathcal{P}$ *definitivamente* se x_n ha $\mathcal{P}$ per ogni n sufficientemente grande, cioè: esiste $n_0 \in \mathbf{N}$ t.che x_n abbia $\mathcal{P}$ per ogni $n \geq n_0$.

Esempi.
- $\frac{1}{n} < 0{,}012$ definitivamente
- $n^2 - 2007n - 7002 > 1000$ definitivamente

Limiti di successioni di numeri reali

Definizione. Siano $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$, $p \in \overline{\mathbf{R}}$. Diciamo che $\{x_n\}$ *tende a* p o che p *è il limite di* $\{x_n\}$ se, per ogni $U \in \mathcal{U}(p)$, $x_n \in U$ definitivamente. Notazioni: $x_n \to p$, $\lim x_n = p$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = p$.

Osservazione. Siano $p \in \overline{\mathbf{R}}$, $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$. Sia $\mathcal{V}$ una famiglia di insiemi tale che
a) ogni elemento di $\mathcal{V}$ contenga un intorno di p, e
b) ogni intorno di p contenga un elemento di $\mathcal{V}$.
Allora $x_n \to p$ se e solo se $\forall V \in \mathcal{V}$: $x_n \in V$ definitivamente. In altre parole, nella definizione di limite possiamo sostituire $\mathcal{U}(p)$ con la famiglia $\mathcal{V}$.

Applicando questa osservazione alle seguenti famiglie $\mathcal{V}$:

$$\big\{(p-\varepsilon, p+\varepsilon) : \varepsilon > 0\big\},$$
$$\big\{[p-\varepsilon, p+\varepsilon] : \varepsilon > 0\big\},$$
$$\big\{[p-6\varepsilon, p+6\varepsilon] : \varepsilon > 0\big\},$$
$$\big\{(p-\sqrt{\varepsilon}, p+\sqrt{\varepsilon}) : \varepsilon > 0\big\},$$

otteniamo il seguente

Corollario. *Per* $p \in \mathbf{R}$*, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) $x_n \to p$
(ii) $\forall \varepsilon > 0$: $|x_n - p| < \varepsilon$ *definitivamente (cioè,* $\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0\colon |x_n - p| < \varepsilon}$*)*
(iii) $\forall \varepsilon > 0$: $|x_n - p| \leq \varepsilon$ *definitivamente*

(iv) $\forall \varepsilon > 0$: $|x_n - p| \leq 6\varepsilon$ *definitivamente*
(v) $\forall \varepsilon > 0$: $|x_n - p| < \sqrt{\varepsilon}$ *definitivamente*
ecc.

In modo analogo otteniamo altri due corollari:

Corollario. *Sono equivalenti:*
(i) $x_n \to +\infty$
(ii) $\underline{\forall a \in \mathbf{R}\text{: } x_n > a \text{ definitivamente}}$
(iii) $\forall a \in \mathbf{R}$: $x_n \geq a$ *definitivamente*
(iv) $\forall a > 2006$: $x_n > a$ *definitivamente*
ecc.

Corollario. *Sono equivalenti:*
(i) $x_n \to -\infty$
(ii) $\underline{\forall a \in \mathbf{R}\text{: } x_n < a \text{ definitivamente}}$
(iii) $\forall a > 0$: $x_n < -a$ *definitivamente*
ecc.

△ **Teorema 15 (unicità di limite).** *Una successione non può evere due limiti distinti.* [Dimostrato.]

Definizione. Una successione $\{x_n\}$ può avere uno (e uno solo) dei seguenti *comportamenti*:
a) è *convergente* se $x_n \to p \in \mathbf{R}$;
b) è *divergente* se $x_n \to +\infty$ o $x_n \to -\infty$;
c) è *irregolare* (o *oscillante*) se non ammette limite.

Esempi. a) $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0; b) $\{-n^2\}$ diverge a $-\infty$; c) $\{(-1)^n\}$ è irregolare.

△ **Teorema 16 (permanenza del segno).** *Supponiamo che* $x_n \to p \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \in \mathbf{R}$.
(a) *Se* $p > a$, *allora* $x_n > a$ *definitivamente.* (Non vale il vice versa.)
(b) *Se* $x_n \geq a$ *definitivamente, allora* $p \geq a$. (Non vale il vice versa.)
[Dimostrato.]

△ **Teorema 17.** *Ogni successione convergente è limitata.* [Dimostrato.]

<u>24.10.2007</u> [1 ora]

Esercizio. Ogni successione divergente a $+\infty$ è illimitata superiormente e limitata inferiormente.

Facile esercizio. Siano $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$. Allora sono equivalenti:
(a) $x_n \to p$
(b) $(x_n - p) \to 0$
(c) $|x_n - p| \to 0$

Quesito*. Sia $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ una corrispondenza biunivoca. Allora la rispettiva successione $x_n = \varphi(n)$ è irregolare.

Teorema 18 (del confronto). *Siano* $\{x_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}$ *successioni in* $\mathbf{R}$ *tali che* $a_n \leq x_n \leq b_n$ *definitivamente.*
a) *Se* $p \in \mathbf{R}$, $a_n \to p$, $b_n \to p$, *allora anche* $x_n \to p$ ("teorema dei due carabinieri").
b) *Se* $a_n \to +\infty$, *allora anche* $x_n \to +\infty$.

c) *Se $b_n \to -\infty$, allora anche $x_n \to -\infty$.*
[Dimostrato.]

Corollario. *Se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata, allora $x_n y_n \to 0$.*

Esempi.
a) $x_n = \frac{(n+1)2^{\sin n}\mathrm{Th}(1-\sqrt{n})}{n^2} = \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})2^{\sin n}\mathrm{Th}(1-\sqrt{n})$ converge a 0 (perché $\frac{1}{n} \to 0$ e il resto è limitato).
b) $x_n = n \cdot |\cos(n\pi/3)| \geq \frac{n}{2}$. Visto che $\frac{n}{2} \to +\infty$, abbiamo anche $x_n \to +\infty$.

Definizione (operazioni aritmetiche in $\overline{\mathbf{R}}$). Sia $x \in \mathbf{R}$. Definiamo:

$$x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty,$$
$$x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x \cdot (-\infty) = (-x) \cdot (+\infty),$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty,$$
$$\frac{x}{\pm\infty} = 0.$$

N.B.: Non sono definite le seguenti espressioni:

$$(+\infty) - (+\infty), (+\infty) + (-\infty), \ldots,$$
$$0 \cdot (\pm\infty), \frac{x}{0}, \frac{\pm\infty}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Teorema 19 (calcolo di limiti). *Supponiamo: $x_n \to p \in \overline{\mathbf{R}}$, $y_n \to q \in \overline{\mathbf{R}}$, $c \in \mathbf{R}$. Allora:*
a) $|x_n| \to |p|$;
b) $x_n + y_n \to p + q$ se $p + q$ è definito (analogamente per "$-$");
c) $c \cdot x_n \to cp$ se cp è definito;
d) $x_n \cdot y_n \to pq$ se pq è definito;
e) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{p}{q}$ se $\frac{p}{q}$ è definito.
[Dimostrato: d),e) per $p, q \in \mathbf{R}$.]

<u>**25.10.2007**</u> [2 ore]

Osservazione importante. *Sia $p \in \overline{\mathbf{R}}$. Una successione tende a p se e solo se tutte le sue sottosuccessioni tendono a p.*

Corollario. *Se una successione ha due sottosuccessioni con limiti distinti, essa è irregolare.*

Esempi. Consideriamo le successioni $x_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$, $y_n = \big(2 + (-1)^n\big)^n$, $z_n = \big(3 + (-1)^n\big)^n$. Le prime due sono irregolari, mentre la terza diverge a $+\infty$.

Definizione. Diciamo che una successione $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ converge a $p \in \mathbf{R}$ *per eccesso* (e scriviamo $x_n \to p^+$ oppure $\lim x_n = p^+$) se $x_n \to p$ e $x_n > p$ definitivamente. Analogamente, $\{x_n\}$ converge a p *per difetto* ($x_n \to p^-$) se $x_n \to p$ e, definitivamente, $x_n < p$.

Esercizio.
- $x_n \to \pm\infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_n} \to 0^\pm$
- $x_n \to 0^\pm \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_n} \to \pm\infty$
- $0 \neq x_n \to 0$ e $\mathrm{sgn}(x_n)$ non è definitivamente costante $\;\Rightarrow\; \frac{1}{|x_n|} \to +\infty$, ma non esiste $\lim \frac{1}{x_n}$

Teorema 20 (funzioni elementari e limiti). *Sia $f\colon D \to \mathbf{R}$ una delle seguenti* funzioni elementari *(dove D è il suo insieme di definizione):*

x^p, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{Sh}(x)$, $\mathrm{Ch}(x)$, $\mathrm{Th}(x)$.

Se $D \ni x_n \to p \in D$, allora $f(x_n) \to f(p)$.

- *Limiti notevoli:* gerarchia di infiniti. Si veda il file "Limiti notevoli".

31.10.2007 [1 ora]

Definizione. Siano $\{x_n\}$ una successione in $\mathbf{R}$. Diciamo che $\{x_n\}$ è:

- *non decrescente* (o "crescente in senso lato") se $x_n \le x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;
- *non crescente* (o "decrescente in senso lato") se $x_n \ge x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;
- *(strettamente) crescente* se $x_n < x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;
- *(strettamente) decrescente* se $x_n > x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;
- *monotona* se essa è non decrescente o non crescente;
- *strettamente monotona* se essa è crescente o decrescente.

$\triangle$ **Teorema 21 (limiti di successioni monotone).** *Ogni successione monotona ammette limite (finito o infinito). Più precisamente, se $\{x_n\}$ è non decrescente allora $x_n \to \sup_{n\in\mathbf{N}} x_n$.* (Analogamente, una successione non crescente tende al suo estremo inferiore.) [Dimostrato.]

Si noti che lo stesso teorema vale anche per *successioni definitivamente monotone*, cioè tali che la relazione tra x_n e x_{n+1} valga solo definitivamente (e non necessariamente per ogni $n \in \mathbf{N}$).

Teorema 22 (il numero e di Nepero). *Consideriamo le successioni $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Allora:*

a) $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < y_3 < y_2 < y_1$ *(in particolare, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono convergenti perché sono monotone e limitate);*
b) $\lim x_n = \lim y_n =: e$ *;*
c) $0 < e - x_n < e/n$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *;*
d) $e \approx 2{,}718281828459\ldots$ *;*
e) *il numero e è trascendente (in particolare, irrazionale);*
f) [Eulero] $e = \lim z_n$ *, dove* $z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

- *Altri limiti notevoli:* "figli di e" – si veda il file "Limiti notevoli", 3(a),(b),(c).

07.11.2007 [1 ora]

- *Altri limiti notevoli:* "figli di e" (conclusione), limiti notevoli con funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse (si veda il file "Limiti notevoli"). Alcuni esempi.

08.11.2007 [2 ore]

- *Ancora limiti notevoli* – conclusione (funzioni iperboliche e la formula di Stirling).

Esercizi svolti.

1) Calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$x_n = n^2(1-e^{1/n})(\tfrac{e}{2}+(-1)^n)$$
$$y_n = \left(\tfrac{1}{n^2}+\cos(1/n)\right)^{n^{5/2}\sin(2/\sqrt{n})}$$
$$z_n = (1/n)\log(1+2^n) - n\log(1+(1/3)^n)$$

2) Consideriamo la successione $x_n = (1-\sqrt{n})\arcsin\frac{1}{2n+1}$. Barrare la/e risposta/e esatta/e:
[A] $\{x_n\}$ è limitata superiormente;
[B] $x_n > e$ definitivamente;
[C] $x_n < \pi$ definitivamente;
[D] $\{x_n\}$ è illimitata inferiormente

- *La "formuletta magica":* $\arctan x + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$.

Esempi. $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \sqrt[n]{n!}$, $\lim \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^a}$

Teorema 23 (criterio del rapporto e della radice). *Siano* $\ell \in [0, +\infty]$, $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$. *Supponiamo che* $\lim \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell$ *oppure* $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = \ell$. *Allora:*
1) se $\ell < 1$, *allora* $x_n \to 0$;
2) se $\ell > 1$, *allora* $|x_n| \to +\infty$;
3) se $\ell = 1$, *allora* $\{x_n\}$ *può avere qualsiasi comportamento (e bisogna utilizzare altri metodi per determinarlo).*

Esempi.
- $x_n = \frac{(n!)^a}{(2n)!}$. Dal criterio del rapporto segue che $x_n \to 0$ se $a \le 2$, e $x_n \to +\infty$ altrimenti.
- $x_n = n^a \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$. I casi di $|a| \neq 1$ vengono facilmente risolti usando il criterio della radice. I casi $a = \pm 1$ si risolvono facilmente usando la definizione del numero e.

Limiti di successioni di numeri complessi

Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Chiamiamo *intorno* di z_0 ogni cerchio aperto (cioè, bordo escluso) centrato in z_0, cioè ogni insieme del tipo

$$V = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Come nel caso reale, denotiamo con $\mathcal{U}(z_0)$ l'insieme di tutti gli intorni del numero complesso z_0, e definiamo il limite di una successione $\{z_n\} \subset \mathbf{C}$ come segue:

$$z_n \to z_0 \quad \stackrel{\text{def}}{\equiv} \quad \forall V \in \mathcal{U}(z_0) : z_n \in V \text{ definitivamente.}$$

Lemma. *Siano* $z_0 \in \mathbf{C}$, $\{z_n\} \subset \mathbf{C}$. *Allora sono equivalenti:*
(i) $z_n \to z_0$;
(ii) $\forall \varepsilon > 0 : |z_n - z_0| < \varepsilon$ *definitivamente;*
(iii) $|z_n - z_0| \to 0$;
(iv) $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z_0)$, $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z_0)$.

Dimostrazione. Le equivalenze $(i) \Leftrightarrow (ii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ seguono direttamente dalle definizioni (di limite in $\mathbf{C}$, di intorni di z_0, di limite in $\mathbf{R}$). L'equivalenza $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ segue da una semplice osservazione: se $z_n = x_n + iy_n$ e $z_0 = x_0 + iy_0$, allora

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}\,, \qquad |x_n - x_0| \le |z_n - z_0|\,, \qquad |y_n - y_0| \le |z_n - z_0|\,.$$

<u>21.11.2007</u> [1 ora]

Limiti di sottosuccessioni. Classe limite

Lemma. *Una successione* $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ *ammette una sottosuccessione divergente a* $+\infty$ *se e solo se* $\{x_n\}$ *è illimitata superiormente. (Analogamente:* $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ *ammette una sottosuccessione divergente a* $-\infty$ *se e solo se* $\{x_n\}$ *è illimitata inferiormente.)*

$\triangle$ **Teorema 24 (Heine–Borel).** *Ogni successione limitata (in* $\mathbf{R}$*) ammette una sottosuccessione convergente.* [Dimostrato.]

Commento. *Lo stesso teorema vale per successioni in* $\mathbf{C}$. (Se $\{z_n\} \subset \mathbf{C}$ è una successione limitata, cioè contenuta in un cerchio di raggio finito, allora anche le successioni $\{\mathrm{Re}(z_n)\}$ e $\{\mathrm{Im}(z_n)\}$ sono limitate. Per il Teorema 24 esiste quindi una sottosuccessione $\{n_k\}$ di $\{n\}$ t.che $\{\mathrm{Re}(z_{n_k})\}$ sia convergente a un numero reale x. Applicando un'altra volta il Teorema 24, otteniamo che esiste una sottosuccessione $\{n_{k_j}\}$ di $\{n_k\}$ t.che

$\{\mathrm{Im}(z_{n_{k_j}})\}$ converga a un numero reale y. Per il lemma della lezione scorsa, $\{z_{n_{k_j}}\}$ [che è una sottosuccessione di $\{z_n\}$] converge a $z = x + iy$.)

Corollario. *Ogni successione in* $\mathbf{R}$ *ammette una sottosuccessione regolare (cioè, convergente o divergente).*

Definizione. Chiamiamo *classe limite* di $\{x_n\}$ l'insieme $L(\{x_n\})$ di tutti gli elementi di $\overline{\mathbf{R}}$ ottenibili come limiti di sottosuccessioni di $\{x_n\}$:

$$L(\{x_n\}) = \{p \in \overline{\mathbf{R}} : \ \{x_n\} \text{ ha una sottosuccessione tendente ad } p\}.$$

Osservazioni.

a) $L(\{x_n\}) \neq \emptyset$

b) $x_n \to p \Rightarrow L(\{x_n\}) = \{p\}$

Problemino. Dimostrate che, nel punto b) sopra, vale anche l'implicazione "$\Leftarrow$".

Teorema 25. *La classe limite ha le seguenti proprietà:*

a) $L(\{x_n\})$ *ha massimo e minimo in* $\overline{\mathbf{R}}$;

b) $L(\{x_n\}) \cap \mathbf{R}$ *è un insieme chiuso (in altre parole,* $\mathbf{R} \setminus L(\{x_n\})$ *è aperto).*

Definizione. Definiamo il *massimo limite* e il *minimo limite* di una successione $\{x_n\}$ come il massimo e il minimo della sua classe limite:

$$\overline{\lim}\, x_n := \max\, L(\{x_n\}), \quad \underline{\lim}\, x_n := \min\, L(\{x_n\}).$$

Esempi. Le classi limite delle seguenti successioni: $x_n = (-1)^n$, $y_n = \frac{\log n - (-1)^n n}{\sqrt{n+1}}$.

Esercizio: $z_n = \sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{2}{n\pi}$.

<u>22.11.2007</u> [2 ore]

Esempi.

1) Ordiniamo $\mathbf{Q}$ in una successione $\{q_n\}$ e definiamo la successione $\{x_n\}$ come segue:
$$\{x_n\} = \{q_1, q_1, q_2, q_1, q_2, q_3, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots\}.$$
Ovviamente $\mathbf{Q} \subset L(\{x_n\})$. Siccome $L(\{x_n\})$ ha massimo e minimo, deve contenere anche $\pm\infty$. Dal fatto che il complementare di $L(\{x_n\})$ è aperto e dalla densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ segue che il complementare di $L(\{x_n\})$ è vuoto. Conclusione: $L(\{x_n\}) = \overline{\mathbf{R}}$.

2) Si può dimostrare (ma non è facilissimo) che $L(\{\sin n\}) = L(\{\cos n\}) = [-1, 1]$, $L(\{\tan n\}) = \overline{\mathbf{R}}$.

Osservazione. Sia $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ definiamo $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \sup_{k \geq n} x_k$. La successione $\{s_n\}$ è monotona non crescente, per cui ammette limite e $\lim s_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} s_n$. Ora, il prossimo teorema afferma che $\lim s_n = \overline{\lim}\, x_n$.

Teorema 26.

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right),$$
$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geq n} x_n \right).$$

Da qui la notazione: $\limsup\limits_{n \to +\infty} x_n := \overline{\lim} x_n$, $\quad \liminf\limits_{n \to +\infty} x_n := \underline{\lim} x_n$.

LIMITI DI FUNZIONI

Definizione. Chiamiamo:
a) *intorno anulare* di $p \in \overline{\mathbf{R}}$ ogni insieme del tipo $U \setminus \{p\}$ dove $U \in \mathcal{U}(p)$;
b) *intorno destro* di $p \in \mathbf{R}$ ogni intervallo del tipo $[p, b)$ con $b > p$;
c) *intorno anulare destro* di $p \in \mathbf{R}$ ogni intervallo del tipo (p, b) con $b > p$.

(Analogamente si definiscono intorno sinistro e intorno anulare sinistro di p come intervalli del tipo $(a, p]$ e (a, p) con $a < p$.)

Definizione. Diciamo che una proprietà vale *definitivamente* per $x \to p$ [per $x \to p_+$] se essa vale per ogni punto di un opportuno intorno anulare [intorno anulare destro] di p.

Definizione (limiti di funzioni). Siano: $p, \ell \in \overline{\mathbf{R}}$ e f una funzione definita (almeno) in un intorno anulare di p. Diciamo che *il limite di $f(x)$ per x tendente a p vale ℓ* (oppure: $f(x)$ tende a ℓ per x tendente a p), e scriviamo

$$\lim_{x \to p} f(x) = \ell \,,$$

se, per ogni intorno V di ℓ, $f(x) \in V$ definitivamente per $x \to p$; equivalentemente:

$$\forall V \in \mathcal{U}(\ell) \; \exists U \in \mathcal{U}(p) : \; f(x) \in V \; \text{ per ogni } x \in U \setminus \{p\}.$$

Si definiscono in modo analogo i limiti destro e sinistro e i limiti per eccesso e per difetto.

Esempi di riformulazione equivalente della definizione di limite.
- Per $p, \ell \in \mathbf{R}$: $\lim_{x \to p} f(x) = \ell \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, : |f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni x t.che $0 < |x - p| < \delta$.
- Per $p \in \mathbf{R}$: $\lim_{x \to p} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall a \in \mathbf{R} \; \exists \delta > 0 \, : f(x) < a$ per ogni x t.che $0 < |x - p| < \delta$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R} \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists b \in \mathbf{R} \, : |f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x > b$.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall a \in \mathbf{R} \; \exists b \in \mathbf{R} \, : f(x) > a$ per ogni $x < b$.
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -1^- \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, : f(x) \in (-1 - \varepsilon, -1)$ per ogni $x \in (3, 3 + \delta)$.

Osservazione. Per $p \in \mathbf{R}$ si ha la seguente equivalenza:
$$\lim_{x \to p} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to p^+} f(x) = \ell = \lim_{x \to p^-} f(x) \,.$$

$\triangle$ **Teorema 27 (limiti successionali).** *Siano: $p \in \overline{\mathbf{R}}$, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, $D \subseteq \mathbf{R}$ contenente un intorno anulare di p, $f \colon D \to \mathbf{R}$. Allora sono equivalenti:*
(i) $\lim_{x \to p} f(x) = \ell \,;$
(ii) $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{p\}$ *t.che* $x_n \to p \, : \; f(x_n) \to \ell$.
(Analogamente per limiti unilaterali: se D contiene un intorno anulare destro di p, allora sono equivalenti: *(i')* $\lim_{x \to p_+} f(x) = \ell$; *(ii')* $D \ni x_n \to p^+ \Rightarrow f(x_n) \to \ell$.)
[Dimostrato.]

Esempi. Esempi di limiti che non esistono:
1) $\lim_{x \to -\infty} \cos x$
2) $\lim_{x \to 0^+} \sin(1/x)$
3) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ dove $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è cosí definita: $f(x) = 0$ per $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$, $f(-1/n) = 0$ per $n \in \mathbf{N}$ dispari, $f(-1/n) = 1$ per $n \in \mathbf{N}$ pari, f "lineare" (più precisamente: affine) su ciascuno degli intervalli $[-1/n, -1/(n+1)]$ *(fatevi un disegnino!)*.

Corollari.
1. **(calcolo di limiti).** *A condizione che le espressioni a destra siano definite, valgono le seguenti uguaglianze:*
   a) $\lim_{x \to p} \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big] = \alpha \lim_{x \to p} f(x) + \beta \lim_{x \to p} g(x) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$
   b) $\lim_{x \to p} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \big[\lim_{x \to p} f(x)\big] \cdot \big[\lim_{x \to p} g(x)\big]$
   c) $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \big[\lim_{x \to p} f(x)\big] / \big[\lim_{x \to p} g(x)\big]$

2. ("2 carabinieri"). *Se $h(x) \le f(x) \le g(x)$ per ogni x di un intorno anulare di p, e $\lim_{x\to p} h(x) = \lim_{x\to p} g(x) = \ell$, allora anche $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$.*

3. (limiti notevoli). $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$ *($a > 0$)*, $\lim_{x\to 0_+} x^a \log x = 0$ *($a > 0$), ecc.*

△ **Esercizio.** *(Può essere richiesto all'esame!)*

a) Formulare e dimostrare il teorema dell'**unicità** di $\lim_{x\to p} f(x)$.

b) Dimostrare il seguente teorema della **permanenza del segno**:
Siano $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$, $\alpha \in \mathbf{R}$.
 (i) Se $\ell > \alpha$, allora $f(x) > \alpha$ definitivamente per $x \to p$.
 (ii) Se $f(x) \ge \alpha$ definitivamente per $x \to p$, allora $\ell \ge \alpha$.

<u>28.11.2007</u> [1 ora]

Definizione. Siano $E \subseteq \mathbf{R}$ un insieme non vuoto e $f\colon E \to \mathbf{R}$ una funzione. Diciamo che:

- f è *non decrescente* (o "crescente in senso lato") su E se vale l'implicazione $\big[x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2)\big]$;
- f è *non crescente* (o "decrescente in senso lato") su E se vale l'implicazione $\big[x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \ge f(x_2)\big]$;
- f è *(strettamente) crescente* su E se vale l'implicazione $\big[x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)\big]$;
- f è *(strettamente) decrescente* su E se vale l'implicazione $\big[x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)\big]$;
- f è *monotona* su E se f è non decrescente o non crescente su E;
- f è *strettamente monotona* su E se f è crescente o decrescente su E.

Osserviamo che, per $E = \mathbf{N}$, f è una successione e la definizione qui sopra è equivalente alla definizione di vari tipi di monotonia di successioni nella lezione del 31/10.

Presentiamo ora un teorema analogo al Teorema 21.

Teorema 28 (limiti di funzioni monotone). *Sia $(a, b) \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo aperto (limitato o illimitato). Ogni funzione monotona $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ ammette (in $\overline{\mathbf{R}}$) i due limiti*

$$\lim_{x\to a^+} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x)\,.$$

Più precisamente, se f è non decrescente su (a, b), allora

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)\,.$$

[Dimostrato.]

Asintoti

Definizione.

1) Sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Diciamo che la retta $x = x_0$ è *asintoto verticale al grafico della funzione f per $x \to x_0$* se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$. Analogamente si definisce asintoto verticale per $x \to x_0^+$ o per $x \to x_0^-$.
2) Diciamo che la retta $y = mx + q$ è asintoto (obliquo se $m \ne 0$, orizzontale se $m = 0$) al grafico di f per $x \to +\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - q] = 0$. Analogamente si definisce asintoto per $x \to -\infty$.

Teorema 29 (calcolo di asintoti). *Sono equivalenti:*
(i) $y = mx + q$ *è asintoto al grafico di* f *per* $x \to +\infty$*;*
(ii) $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ *e* $q = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$.
(Analogamente per $x \to -\infty$.*)* [Dimostrato.]

<u>**29.11.2007**</u> [2 ore]

CONTINUITÀ

Definizione. Sia f una funzione definita in un intorno [intorno destro] di un punto p. Diciamo che f è *continua* [*continua da destra*] in p se $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ $[\lim_{x\to p^+} f(x) = f(p)]$.

Osservazioni.

1) *Sono equivalenti:*
   (i) f *è continua in* p*;*
   (ii) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $\big|f(x) - f(p)\big| < \varepsilon$ *per ogni* x *t.che* $|x - p| < \delta$*;*
   (iii) vale l'implicazione $\big[\, x_n \to p \ \Rightarrow\ f(x_n) \to f(p)\,\big]$.
2) *Ogni funzione elementare è continua in ogni punto del suo insieme di definizione (considerando la continuità da destra o da sinistra negli eventuali punti di bordo appartenenti all'insieme).*
3) *Se* f, g *sono due funzioni continue in* p *e* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$*, allora lo sono anche le seguenti funzioni:* $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, f/g *(se* $g(p) \neq 0$*).*

Teorema 30 (continuità di funzioni composte). *Siano* D, E *sottoinsiemi di* $\mathbf{R}$*. Consideriamo due funzioni* $D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbf{R}$*. Supponiamo che* D *contenga un intorno di* x_0 *e che* f *sia continua in* x_0 *con* $f(x_0) = y_0$.

I) *Se* E *contiene un intorno di* y_0 *e* g *è continua in* y_0*, allora anche la funzione composta* $g \circ f$ *è continua in* x_0.

II) *Se* E *contiene un intorno destro di* y_0*,* g *è continua da destra in* y_0 *e* $f(x) \geq y_0$ *definitivamente per* $x \to x_0$*, allora anche* $g \circ f$ *è continua in* x_0.

[Dimostrato.]

Classificazione delle discontinuità.
Sia f una funzione definita (almeno) in un intorno anulare di $p \in \mathbf{R}$. Denotiamo $L_+ = \lim_{x\to p^+} f(x)$, $L_- = \lim_{x\to p^-} f(x)$. Osserviamo che f è continua in p se e solo se $L_+ = L_- = f(p)$.

Le possibili discontinuità di f in p possono essere classificate come segue:

1. **Discontinuità eliminabile:** quando $L_+ = L_- \in \mathbf{R}$ ma non sono uguali a $f(p)$. In questo caso è possibile *eliminare* la discontinuità in p, (ri)definendo il valore di $f(p)$. Più precisamente, se definiamo
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L_+ = L_- & \text{per } x = p, \\ f(x) & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
otteniamo una funzione $\tilde{f}$ che è continua in p.
(Esempi di discontinuità eliminabile: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = |\mathrm{sgn}(x)|$, entrambe in $p = 0$.)
2. **Discontinuità di I specie:** quando L_+ e L_- sono finiti ma distinti. Si tratta di un *"salto finito"* della funzione nel punto p.
(Esempi: $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ in $p = 0$; $g(x) = \arctan \frac{1}{x+2}$ in $p = -2$.)
3. **Discontinuità di II specie:** quando almeno uno dei limiti L_+ , L_- è infinito o non esiste. Questo gruppo consiste di *tutte le discontinuità che non siano eliminabili né di I specie.*
(Esempi, tutti in $p = 0$: $f_1(x) = \log|x|$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = e^{1/x}$, $f_4(x) = \sin(1/x)$.)

Esercizi. Trovare i punti di discontinuità e determinarne il tipo:

1) La funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, data da $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x = \frac{1}{n} \text{ per qualche } n \in \mathbf{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

2) La *funzione di Dirichlet* $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

Problemino. Determinare i punti di discontinuità e il loro tipo per la seguente *funzione di Riemann*:

$$R(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q \text{ con } p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N},\ p, q \text{ primi tra loro;} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Teorema 31 (punti di discontinuità delle funzioni monotone). *Sia $f\colon I \to \mathbf{R}$ dove $I \subseteq \mathbf{R}$ è un intervallo aperto. Se f è monotona su I, allora l'insieme dei suoi punti di discontinuità è al più numerabile ed essi sono tutti di I specie.* [Dimostrato.]

Funzioni continue su intervalli

Definizione. Diciamo che f *è continua sull'intervallo* I se f è continua in oni punto di I, considerando negli eventuali estremi di I la continuità da destra (in $\min I$) e da sinistra (in $\max I$).

$\triangle$ **Teorema 32 (degli zeri).** *Sia f una funzione continua su $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora esiste (almeno) un punto $x_0 \in (a, b)$ t.che $f(x_0) = 0$.* [Dimostrato.]

<u>**05.12.2007**</u> [1 ora]

Definizione. Sia f una funzione definita su un intervallo I. Diciamo che f ha la *proprietà di Darboux* su I se, per ogni intervallo $J \subseteq I$, anche l'insieme immagine $f(J)$ è un intervallo.

Esempi.

1) La funzione di Dirichlet (v. la lezione del 29/11) e la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, non hanno la proprietà di Darboux su $\mathbf{R}$.
2) La funzione $f(x) = \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, ha la proprietà di Darboux su $\mathbf{R}$, ma non è continua in 0.

Il seguente teorema è un facile corollario del Teorema degli zeri.

$\triangle$ **Teorema 33 (Darboux).** *Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo. Ogni funzione continua su I ha la proprietà di Darboux su I.* [Dimostrato.]

Esempio di applicazione del teorema di Darboux. *Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ tali che i due limiti*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

esistano e siano infiniti di segno opposto. Se f è continua su (a, b) allora essa è suriettiva.
(Infatti, $f\big((a, b)\big)$ è un intervallo; inoltre, l'ipotesi sui limiti implica che f è su (a, b) illimitata sia inferiormente sia superiormente; quindi necessariamente $f\big((a, b)\big) = \mathbf{R}$.)

$\triangle$ **Lemmino (raggiungibilità del "sup").** *Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ un insieme non vuoto. Allora esiste una successione $\{u_n\} \subset E$ tale che $u_n \to \sup E$.*

$\triangle$ **Teorema 34 (Weierstrass).** *Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora esistono $\max f([a, b])$ e $\min f([a, b])$ (cioè, f assume in $[a, b]$ il suo valore massimo e il suo valore minimo). In particolare, f è limitata su $[a, b]$.* [Sarà dimostrato nella lezione di domani.]

Osservazione. Facili esempi mostrano che le ipotesi del Teorema di Weierstrass sono ottimali: esso non vale in generale né per funzioni che non siano continue, né per intervalli chiusi illimitati, né per intervalli limitati non chiusi.

<u>**06.12.2007**</u> [2 ore]

- *Dimostrazione del Teorema di Weierstrass.*

Corollario. *Se f è continua su $[a,b]$, allora $f([a,b]) = [m,M]$ dove $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.*

Esempio di applicazione del teorema di Weierstrass. *Siano $-\infty \le a < b \le +\infty$ e $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ tali che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Se f è continua su (a,b), allora f assume su (a,b) il suo valore minimo.*
(Poniamo $i = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$ e fissiamo un numero relae $c > i$. Le ipotesi implicano che esistono $a_1, b_1 \in (a,b)$ tali che $f(x) > c$ per ogni $x \in (a,a_1) \cup (b_1,b)$; ovviamente $a_1 < b_1$ [altrimenti sarebbe $f > c$ su tutto (a,b)]; ora, per Weierstrass, $i = \inf f([a_1,b_1]) = \min f([a_1,b_1]) = \min f((a,b))$.)

- Sia P un polinomio di grado $n > 0$. Ovviamente, per $x \to \pm\infty$, si ha $P(x) \sim cx^n$, dove $c \ne 0$ è il coefficiente di x^n di P.
  Caso di n pari. In questo caso: se $c > 0$ allora $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$ e quindi P assume il suo minimo; se $c < 0$ allora $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = -\infty$ e quindi P assume il suo massimo. In particolare, P non è mai suriettivo.
  Caso di n dispari. In questo caso i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ sono infiniti di segno oposto e quindi (v. la lezione di ieri) P è suriettivo.

Esercizi.
1. Sia $f\colon [a,b] \to [a,b]$ continua su $[a,b]$. Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ t.che $f(x_0) = x_0$ (detto *punto fisso* per f). (Suggerimento: il teorema degli zeri.)
2. Supponiamo che $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ abbia la proprietà di Darboux. Dimostrare che gli eventuali punti di discontinuità di f sono tutti di II specie.

Teorema 35 (continuità della funzione inversa). *Siano $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbf{R}$ una funzione continua su I.*
1. *f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona su I.*
2. *Se f è strettamente monotona (⇔iniettiva) su I, allora:*
   (a) la funzione inversa $f^{-1}\colon f(I) \to I$ è strettamente monotona (allo stesso modo di f) sull'intervallo $f(I)$;
   (b) f^{-1} è continua su $f(I)$;
   (c) per ogni intervallo aperto $J \subseteq I$, $f(J)$ è un intervallo aperto.

Uniforme continuità

Ricordiamo che f è continua su un intervallo I se f è continua in ogni punto $x \in I$, cioè:
$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0\ \forall y \in I \text{ con } |y-x| < \delta\colon\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$
Osserviamo che δ dipende non solo da ε ma anche da x. La nozione in cui δ non dipende da x viene chiamata uniforme continuità.

Definizione. Diciamo che f è *uniformemente continua* (*u.c.*) su I se:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x,y \in I \text{ con } |y-x| < \delta\colon\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

(In parole povere, possiamo controllare la grandezza dell'incremento della funzione controllando soltanto la grandezza dell'incremento della variabile indipendente.)

Ovviamente: uniforme continuità ⇒ continuità.

Esempi.
1) Ogni funzione *lipschitziana* su I, cioè tale che esista $L \ge 0$ con $|f(y)-f(x)| \le L|y-x|$ per ogni $x,y \in I$, è u.c. su I. (Esempi di funzioni lipschitziane: $\sin x$ e $\cos x$ su $\mathbf{R}$; $\sqrt{x}$ e $1/x$ su ogni intervallo $[a,+\infty)$ con $a > 0$).
2) $f(x) = x^2$ non è u.c. su alcun intorno di $+\infty$.

3) $f(x) = 1/x$ non è u.c. su alcun intorno anulare destro di 0.

Teorema 36 (Heine-Cantor). *Se f è continua su $[a, b]$, allora essa è anche u.c. su $[a, b]$.* [Dimostrato.]

Esercizio. Siano I, J due intervalli in $\mathbf{R}$ tali che $I \cap J \neq \emptyset$. Se f è u.c. su I e anche su J, allora f è u.c. sull'intervallo $I \cup J$.

Corollario. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è u.c. su tutto $[0, +\infty)$. Infatti, essa è u.c. su $[1, +\infty)$ (v. sopra) e anche su $[0, 1]$ (Teorema 36).

$*$**06.12.2007** [1 ora] - *Corso avanzato: presentazione dei temi delle tesine.*

12.12.2007 [1 ora]

DERIVATA, CALCOLO DIFFERENZIALE

Definizione. Sia f una funzione definita in un intorno di un punto x_0. Chiamiamo *derivata* di f in x_0 il limite

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \Big(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\Big).$$

Diciamo che f è *derivabile* in x_0 se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita.
(Notazioni alternative per la derivata: $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$.)
Le quantità $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ vengono chiamate *rapporti incrementali.*

Dal punto di vista della meccanica, se $f(t)$ denota lo spazio (la posizione) di una particella nell'istante t, il rapporto incrementale $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ è la velocità media della particella nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0 + h]$, mentre la derivata $f'(t_0)$ è la sua velocità istantanea nell'istante t_0.

Dal punto di vista geometrico, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P := (x_0, f(x_0))$ e $Q := (x_0 + h, f(x_0 + h))$ del grafico di f, mentre la derivata $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto P.

- Se f è derivabile in x_0, allora l'equazione della **retta tangente** al grafico di f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ è: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Possiamo definire in modo naturale anche le derivate unilaterali: sia f definita in un intorno destro di x_0; chiamiamo *derivata destra* di f in x_0 il limite

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e diciamo che f è *derivabile da destra* in x_0 se la derivata destra $f'_+(x_0)$ esiste finita. (Analogamente per la derivata sinistra.)

$\triangle$ **Teorema 37 (condizione necessaria per la derivabilità).** *Se f è derivabile [derivabile da destra] in x_0, allora f è continua [continua da destra] in x_0.* [Dimostrato.]

Esempio. Per $a \in \mathbf{R}$, consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} |x|^a \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Allora f è continua su $\mathbf{R}$ se e solo se f è continua in 0, e ciò succede se e solo se $a > 0$. Inoltre, $f'_+(0)$ esiste (e vale 0) se e solo se $a > 1$; e lo stesso è vero anche per $f'_-(0)$. Di conseguenza, f è derivabile in 0 se e solo se $a > 1$. Si noti bene che, per $a \in (0, 1]$, la funzione f è continua su $\mathbf{R}$ ma le derivate unilaterali $f'_\pm(x_0)$ non esistono.

Esempio. Sia $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$. Allora $f'(0) = +\infty$ (esiste!), ma f non è continua in 0.

Alcuni tipi di non derivabilità di una funzione continua nel punto

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0, continua in x_0. Ricordiamo che f è derivabile in x_0 se le due derivate unilaterali $f'_\pm(x_0)$ esistono finite e sono uguali tra loro.

Elenchiamo i seguenti tipi significativi di non derivabilità in x_0.

1) *Punto angoloso* quando $f'_\pm(x_0)$ esistono finite ma distinte;
per es. $|x|$ nel punto $x_0 = 0$.
2) *Punto angoloso in senso lato* quando $f'_\pm(x_0)$ esistono ma soltanto una di loro è finita;
per es. $\max\{0, \sqrt[3]{x}\}$ in $x_0 = 0$.
3) *Punto a tangente verticale* quando $f'_\pm(x_0)$ esistono infinite e uguali tra loro;
per es. $\sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$.
4) *Cuspide* quando $f'_\pm(x_0)$ esistono infinite e distinte;
per es. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ oppure $-\sqrt{|x|}$ in $x_0 = 0$.

<u>**13.12.2007**</u> [2 ore]

Curiosità. *È noto (ma la dimostrazione non è facile) che esistono funzioni continue $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, f non sia derivabile né da destra né da sinistra in x.*

Teorema 38 (derivata e le operazioni aritmetiche). *Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Siano f, g due funzioni definite in un intorno di x_0 e derivabili in x_0. Allora anche le funzioni $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, e f/g (se $g(x_0) \neq 0$) sono derivabili in x_0 e le loro derivate in x_0 soddisfano:*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

△ **Teorema 39 (derivata di funzioni composte).** *Siano f una funzione definita in un intorno di x_0 e g una funzione definita in un intorno di $y_0 := f(x_0)$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in y_0, allora:*
a) la funzione composta $h = g \circ f$ (cioè $h(x) = g(f(x))$) è definita in un intorno di x_0;
b) la funzione h è derivabile in x_0 con $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$ $\quad (= g'(f(x_0))f(x_0))$.
[Dimostrato.]

Teorema 40 (derivata dell'inversa). *Siano: $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallo aperto, $x_0 \in I$, $f\colon I \to \mathbf{R}$ funzione continua e strettamente monotona su I. Se f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa $f^{-1}\colon f(I) \to I$ è derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \left[= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}\right]. \qquad \text{[Dimostrato.]}$$

- Esempi: abbiamo calcolato (usando la definizione) le derivate di e^x e $\sin x$ e poi, utilizzando il Teorema 40, le derivate delle corrispondenti funzioni inverse $\log x$ e $\arcsin x$.

Definizione (punti di estremo o estremanti). Siano: I un intervallo, $f\colon I \to \mathbf{R}$, $x_0 \in I$. Diciamo che il punto x_0 è un punto di:
a) *massimo assoluto* (o globale) di f su I se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in I$;
b) *massimo assoluto stretto* (o forte) di f su I se $f(x_0) > f(x)$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$;
c) *massimo relativo* (o locale) di f su I se esiste un intorno V di x_0 t.che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in I \cap V$;
d) *massimo relativo stretto* di f su I se esiste un intorno V di x_0 t.che $f(x_0) > f(x)$ per ogni $x \in (I \cap V) \setminus \{x_0\}$.

Analogamente si definiscono i vari tipi di punto di minimo. I punti che sono di minimo o di massimo vengono chiamati *punti di estremo* o *estremanti*. Possiamo quindi avere punti di estremo assoluto o relativo, ecc.

$\triangle$ **Teorema 41 (Fermat).** *Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se x_0 è un estremante (almeno relativo) per f, allora $f'(x_0) = 0$ (cioè, x_0 è un* **punto stazionario***).* [Dimostrato.]

Attenzione!. Un punto stazionario può non essere un estremante: si consideri la funzione $f(x) = x^3$ in 0.

Esercizio. Supponiamo che esistano le derivate unilaterali $f'_\pm(x_0)$. Nella dimostrazione del Teorema di Fermat abbiamo in realtà dimostrato che, se x_0 è un punto di massimo relativo allora $f'_-(x_0) \le 0 \le f'_+(x_0)$. E sappiamo anche che non vale il viceversa.
Supponiamo che $f'_-(x_0) < 0 < f'_+(x_0)$. Dimostrare che x_0 è un punto di massimo relativo.

<u>**19.12.2007**</u> [1 ora]

Osservazione. Sono sospetti di essere estremanti per f su un intervallo I i seguenti punti:
a) i punti stazionari,
b) gli eventuali punti estremi di I appartenenti ad I,
c) i punti di non derivabilità.

$\triangle$ **Teorema 42 (Rolle).** *Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) (cioè, derivabile in ogni punto di (a, b)). Se $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ t.che $f'(x_0) = 0$.* [Dimostrato.]

$\triangle$ **Teorema 43 (Lagrange; "teorema dell'incremento finito").** *Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ t.che*
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$
[Dimostrato.]

Teorema 44 (Cauchy). *Siano f, g due funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ t.che*
$$f'(x_0) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) = g'(x_0) \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$$
(cioè, $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ se le frazioni sono definite).

Esempio. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ è derivabile in 0, ma i limiti $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x)$ non esistono. In particolare, la derivata f' non è continua in 0.

Teorema 45 (derivata come limite di derivate). *Siano $-\infty < a < b \le +\infty$ e f una funzione continua su $[0, +\infty)$ e derivabile su (a, b). Se esiste il limite $\lim_{x\to a^+} f'(x) = D \in \overline{\mathbf{R}}$, allora esiste $f'_+(a)$ e vale D.*
(Se, invece, il limite D non esiste, il teorema non dice nulla sull'esistenza o meno di $f'_+(a)$.)

<u>**20.12.2007**</u> [2 ore]

Notazione. In quanto segue, I denoterà un qualsiasi intervallo non degenere in $\mathbf{R}$, e I^0 denoterà l'insieme dei punti interni di I, cioè $I^0 = I \setminus \{\inf I, \sup I\}$.

$\triangle$ **Teorema 46 (derivata e monotonia).** *Sia f una funzione continua su I e derivabile in I^0. Allora valgono le seguenti implicazioni.*
1. *$f'(x) \ge 0$ per ogni $x \in I^0$ $\Leftrightarrow$ f è non decrescente su I.*
2. *$f'(x) > 0$ per ogni $x \in I^0$ $\Rightarrow$ f è strettamente crescente su I* ($\not\Leftarrow$: si consideri $f(x) = x^3$).
[Dimostrato.]

$\triangle$ **Corollario 1 (caratterizzazione delle costanti).** *Sia f una funzione continua su I e derivabile in I^0. Allora f è costante su I se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I^0$.*

Corollario 2 (caratterizzazione di stretta monotonia). *Sia f continua su I e derivabile in I^0. Allora f è strettamente crescente su I se e solo se:*

$f' \geq 0$ su I e l'insieme $M = \{x \in I^0 : f'(x) > 0\}$ è denso in I (cioè, ogni sottointervallo aperto non vuoto di I interseca M).

Corollario pratico. *Sia f continua su I. Sia $A \subset I^0$ un insieme ("insieme di eccezioni") tale che f sia derivabile in ogni punto di $I^0 \setminus A$ e, per ogni $[a,b] \subset I$, l'insieme $[a,b] \cap A$ sia finito. Allora valgono le implicazioni:*

(a) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I^0 \setminus A \;\Rightarrow\; f$ è non decrescente su I;
(b) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I^0 \setminus A \;\Rightarrow\; f$ è strettamente crescente su I;
(c) $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I^0 \setminus A \;\Rightarrow\; f$ è costante su I.

Dimostrazione di (a). (I punti (b),(c) si dimostrano allo stesso modo.) Suponiamo che $f' \geq 0$ su $I^0 \setminus A$. Basta dimostrare che f è non decrescente su ogni intervallo $[a,b] \subset I$. L'insieme $[a,b] \cap A$ è finito: siano $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ i suoi elementi. Applicando il Teorema 47 agli intervallini chiusi $[a,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{k-1},x_k], [x_k,b]$, otteniamo che f è non decrescente su ciascuno di essi. Da qui segue (perché?) che f è non decrescente su $[a,b]$. *q.e.d.*

Commento. Le implicazioni nel Corollario pratico valgono anche per un qualsiasi insieme numerabile A di eccezioni. Ma la dimostrazione di tale fatto è più difficile.

Teorema 47 (regola di de L'Hopital). *Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e f, g due funzioni derivabili su (a,b). Supponiamo che sia vera una delle seguenti due condizioni:*

$\left[\frac{0}{0}\right]$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$;
$\left[\frac{*}{\infty}\right]$ $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$.

Se esiste il limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbf{R}}$, allora esiste anche il limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale L. (Si noti che, se il limite con le derivate non esiste, allora senza ulteriori informazioni non possiamo dire niente sull'esistenza o non esistenza del limite senza derivate.)

Esempi.

1) Il limite $\lim_{x\to 0^+} x^a \log x$ può essere calcolato con la regola di de L'Hopital, scrivendolo nella forma $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-a}}$.
2) Applicando de L'Hopital al limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}\sin(e^x)}{\log(1+e^{-x})}$, si ottiene (dopo la derivazione) un limite che non esiste. Nonostante ciò, il limite di partenza esiste e vale 0.

Definizione (derivabilità di ordine superiore).

1. Diciamo che f è *derivabile sull'intervallo* I se f è derivabile in ogni punto di I, considerando le derivate unilaterali negli eventuali estremi di I appartenenti ad I. In tal caso denoteremo con f' la funzione che ai punti $x \in I^0$ associa $f'(x)$ e agli eventuali punti di $I \setminus I^0$ associa le relative derivate unilaterali.

2. Una definizione per induzione: diciamo che f è *n volte derivabile su I* ($n \in \mathbf{N}$) se:
   a) nel caso $n = 1$, f è derivabile su I;
   b) nel caso $n > 1$, f è $n-1$ volte derivabile su I e la sua derivata $(n-1)$-esima $f^{(n-1)}$ è derivabile su I; poniamo $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.

   Notazioni per la derivata n-esima: $f^{(n)}$, $D_n f$, $\frac{d^n f}{dx^n}$.

3. Sia f definita in un intorno di x_0. Diciamo che f è *n volte derivabile nel punto x_0* se esiste $V \in \mathcal{U}(x_0)$ t.che f sia $n-1$ volte derivabile su V con la derivata $f^{(n-1)}$ derivabile nel punto x_0.

4. Diciamo che f è *di classe $C^0(I)$* (oppure $C(I)$) se f è continua sull'intervallo I. Per $n \in \mathbf{N}$, diciamo che f è *di classe $C^n(I)$* se f è n volte derivabile su I con la derivata $f^{(n)}$ continua su I (in questo caso sono automaticamente continue su I tutte le funzioni f, f', f'', $\ldots$, $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$).

<u>**07.01.2008**</u> [2 ore]

Polinomio e sviluppi di Taylor

In parole povere, gli sviluppi di Taylor dicono che è possibile, vicino a un punto x_0, approssimare una funzione con un opportuno polinomio, dando delle informazioni sul relativo errore.

In quanto segue, siano fissati $n \in \mathbf{N}_0$, $x_0 \in \mathbf{R}$.

Iniziamo con due semplici lemmi.

Lemma 1. *Ogni polinomio P di un grado $\leq n$ è esprimibile in un unico modo nella forma*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, (x - x_0)^k$$

dove $c_k \in \mathbf{R}$. Inoltre, $c_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(0 \leq k \leq n)$.

Dimostrazione. Se $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, allora $P(x) = P\big((x-x_0)+x_0\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k[(x-x_0)+x_0]^k$. Svolgendo le potenze e raggruppando tutti i termini secondo le varie potenze di $(x-x_0)$, otteniamo che P è esprimibile nella forma $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, (x - x_0)^k$. In tal caso si ha:

$$
\begin{aligned}
&P(x_0) = c_0 = c_0 \cdot 0!\,, \\
&P'(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k k (x-x_0)^{k-1} \quad \Rightarrow \quad P'(x_0) = c_1 \cdot 1! \\
&P''(x_0) = \sum_{k=2}^{n} c_k k(k-1)(x-x_0)^{k-2} \quad \Rightarrow \quad P''(x_0) = c_2 \cdot 2! \\
&P'''(x_0) = \sum_{k=3}^{n} c_k k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3} \quad \Rightarrow \quad P'''(x_0) = c_3 \cdot 3!
\end{aligned}
$$

eccetera.

Essendo $P^{(k)}(x_0) = c_k \cdot k!$, si ottiene $c_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$. In particolare, i coefficienti c_k sono univocamente determinati. *q.e.d.*

Lemma 2. *Siano P, Q due polinomi di gradi $\leq n$ tali che $P(x) = Q(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$. Allora $P = Q$.*

Dimostrazione. Il polinomio $R = P - Q$ è di un grado $\leq n$ e soddisfa $R(x) = o((x-x_0)^n)$. Secondo Lemma 1, possiamo scrivere $R(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, (x-x_0)^k$. Se R non è identicamente nullo, non tutti i coefficienti c_k sono nulli. Sia j il minor indice tale che $c_j \neq 0$. Allora $R(x) = o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^j)$ e quindi $0 = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{(x-x_0)^j} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sum_{k=j}^{n} c_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^j} = c_j$. Questa contraddizione completa la dimostrazione. *q.e.d.*

Osservazione.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,.$

b) Se $\varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}$, allora $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \leq k \leq n$, e $\varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Ora siamo pronti per enunciare il teorema principale. Per semplificare la notazione, scriveremo (x, y) anche quando $x > y$, intendendo l'intervallo (y, x). Analogamente per $[x, y]$.

Teorema 48. *Siano I un intorno destro, sinistro o bilaterale di x_0, e $f \colon I \to \mathbf{R}$ una funzione continua in x_0 tale che, se $n \geq 1$, f sia $n-1$ volte derivabile su I con $f^{(n-1)}$ derivabile in x_0.*

(I) **(polinomio di Taylor).** *Esiste un unico polinomio P_n di un grado $\le n$ tale che $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per ogni $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Inoltre, P_n è dato dalla formula*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k .$$

(II) **(sviluppo di Taylor con il resto di Peano).** *Per $x \to x_0$, $x \in I$, si ha*

$$f(x) = P_n(x) + o\big((x - x_0)^n\big) .$$

Inoltre, P_n è l'unico polinomio di grado $\le n$ con tale proprietà.

(III) **(sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange).** *Supponiamo che f sia di classe $\mathcal{C}^n(I)$ con $f^{(n)}$ derivabile in ogni punto di $I \setminus \{x_0\}$* (ciò si verifica, ad es., quando f è $n+1$ volte derivabile su I). *Allora per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ esiste $t_x \in (x_0, x)$ tale che*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Dimostrazione di (I) segue facilmente da Lemma 1: il polinomio, dato dalla formula in (I), soddisfa la richiesta sulle derivate ed è unico.

Dimostrazione di (II). Vogliamo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ se f è n volte derivabile in x_0 (continua in x_0 se $n = 0$) e P_n è il suo polinomio di Taylor di ordine n.

Per $n = 0$ ciò è vero in quanto $\lim_{x \to 0} [f(x) - P_0(x)] = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ perché f è continua in x_0.

Per $n \ge 1$ procediamo per induzione.

Caso $n = 1$: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$ (definizione di derivata).

Passo induttivo: supponiamo $n > 1$ e che l'affermazione sia vera per $n - 1$ (al posto di n). Denotiamo con $\tilde{P}_{n-1}$ il polinomio di Taylor di ordine $n - 1$ della funzione $g = f'$. Secondo l'ipotesi di induzione, $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$. Ora, applicando la regola di de L'Hopital (caso "0/0") e l'Osservazione a), abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \, k \, (x - x_0)^{k-1}}{n \, (x - x_0)^{n-1}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{n \, (x - x_0)^{n-1}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)}{n \, (x - x_0)^{n-1}} = 0.
\end{aligned}$$

L'unicità di P_n segue da Lemma 2.

Dimostrazione di (III). Fissiamo un qualsiasi $x \in I \setminus \{x_0\}$ e definiamo $M \in \mathbf{R}$ con la formula $f(x) = P_n(x) + M(x - x_0)^{n+1}$. La funzione $g \colon I \to \mathbf{R}$, data da

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - M(t - x_0)^{n+1},$$

soddisfa $g(x) = 0$ e, secondo (I) e Osservazione b),

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{per } 0 \le k \le n, \qquad g^{(n+1)}(x_0) = M \cdot (n+1)! \, .$$

Siccome $g(x_0) = g(x) = 0$, il teorema di Rolle implica che esiste $x_1 \in (x_0, x)$ con $g'(x_1) = 0$.
Siccome $g'(x_0) = g'(x_1) = 0$, il teorema di Rolle implica che esiste $x_2 \in (x_0, x_1) \subset (x_0, x)$ con $g''(x_2) = 0$.

...

Siccome $g^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0$, il teorema di Rolle implica che esiste $x_n \in (x_0, x_{n-1}) \subset (x_0, x)$ con $g^{(n)}(x_n) = 0$.
Siccome $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_n) = 0$, il teorema di Rolle implica che esiste $t_x \in (x_0, x_n) \subset (x_0, x)$ con $g^{(n+1)}(t_x) = 0$.

Ora, essendo $P_n^{(n+1)} \equiv 0$, abbiamo (usando di nuovo Osservazione b))

$$0 = g^{(n+1)}(t_x) = f^{(n+1)}(t_x) - 0 - M \cdot (n+1)!$$

da cui $M = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}$. *q.e.d.*

Terminologia. Le formule di (II) e (III) vengono chiamate *sviluppo di Taylor di ordine* n (o "arrestato all'n-esimo ordine") *di* f*, centrato in* x_0*, con il resto di Peano o Lagrange.* Gli sviluppi di Taylor centrati in 0 vengono chiamati *sviluppi di McLaurin.*

Seguono alcune **applicazioni del Teorema 48**.

- Il numero e è irrazionale.

<u>**09.01.2008**</u> [1 ora]

- Gli sviluppi di McLaurin:
  Se f è n volte derivabile in 0, allora
  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$ per $x \to 0$.
  Se, ad esempio, f è $n+1$ volte derivabile in un intorno I di 0, allora $\forall x \in I\ \exists t_x \in (0, x)$ t.che
  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

- Per la funzione $f(x) = e^x$ si ottiene $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x)$, dove $r_n(x) = \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}$ (con $t \in (0, x)$).
  Siccome $|r_n(x)| = \frac{e^t}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{\max\{0,x\}}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0$, si ha $r_n(x) \to 0$ ($n \to +\infty$) e quindi
  $e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
  In particolare, ponendo $x = 1$, si ottiene la formula di Eulero dal Teorema 22.

- Sfruttando le seguenti osservazioni:
  (a) *se* f *è dispari e definita in* 0*, allora* $f(0) = 0$*,*
  (b) *se* f *è pari/dispari, allora* f' *è dispari/pari,*
  si ottiene che *nello sviluppo di McLaurin di una funzione pari/dispari compaiono soltanto i termini con potenze pari/dispari* (nel senso che le altre potenze hanno coefficiente 0).

- *Esempio.* Calcolare $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$ della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$. (Non è necessario derivare: $f^{(6)}(0) = 0$ perché f è dispari; $f^{(5)}(0)$ può essere determinata utilizzando il coefficiente c_5 di x^5 nello sviluppo di McLaurin di f, arrestato al 5° ordine.)

- Gli sviluppi notevoli (o le derivate successive in 0) possono essere utilizzati anche per verificare se 0 è un estremante.
  Se $f'(0) \neq 0$, allora 0 non è estremante (per il teorema di Fermat).
  Supponiamo che $f'(0) = 0$, e $n > 1$ sia il più piccolo ordine di derivata non nulla in 0, cioè
  $f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $f^{(n)}(0) \neq 0$.
  Allora lo sviluppo di McLaurin di ordine n ci dà (denotando $c = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$):
  $f(x) - f(0) = c \cdot x^n + o(x^n) \sim c \cdot x^n$.
  Di conseguenza, le quantità $f(x) - f(0)$ e $c \cdot x^n$ hanno lo stesso segno in un intorno anulare di 0. Quindi:
  - se n è pari e $f^{(n)}(0) > 0$ allora 0 è un punto di minimo relativo stretto;
  - se n è dispari e $f^{(n)}(0) < 0$ allora 0 è un punto di massimo relativo stretto;
  - se n è dispari allora 0 non è estremante (0 è un punto di flesso a tangente orizzontale).

<u>**10.01.2008**</u> [2 ore]

Convessità

Un insieme $C \subset \mathbf{R}^2$ viene chiamato *convesso* se con ogni suoi due punti C contiene anche tutto il relativo segmento.

In quanto segue, $I \subseteq \mathbf{R}$ è un intervallo e f è una funzione deinita almeno su I. Denotiamo:

$\mathrm{gr}(f, I) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in I,\ y = f(x)\}$ (*grafico* di f),

$\mathrm{epi}(f, I) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in I,\ y \geq f(x)\}$ (*epigrafico* di f).

Definizione. Diciamo che f è *convessa* (o "concava verso l'alto") su I se il suo epigrafico $\mathrm{epi}(f, I)$ è un insieme convesso.

Osservazione. f è convessa su I se e solo se, per ogni due punti di $\mathrm{gr}(f, I)$, il relativo segmento è contenuto in $\mathrm{epi}(f, I)$.

Definizione. Diciamo che f è *strettamente convessa* su I se e solo se, per ogni due punti di $\mathrm{gr}(f, I)$, il relativo "segmento aperto" è contenuto in $\mathrm{epi}(f, I) \setminus \mathrm{gr}(f, I)$.
Diciamo, inoltre, che f è *(strettamente) concava* su I se la funzione $(-f)$ è (strettamente) convessa.

Dati due punti $x_1, x_2 \in I$, denotiamo con r_{x_1,x_2} la funzione di cui il grafico è la retta passante per i punti $P_1 \equiv (x_1, f(x_1))$ e $P_2 \equiv (x_2, f(x_2))$. È facile vedere che

$$r_{x_1,x_2}(z) = f(x_1) + \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(z - x_1).$$

Lemma (definizione analitica di convessità). *Sono equivalenti:*
(i) f *è convessa [strettamente convessa] su* I*;*
(ii) $\forall x_1, x_2 \in I$ *con* $x_1 \neq x_2$*:* $f(z) \leq r_{x_1,x_2}(z)$ *per ogni* $z \in (x_1, x_2)$ $[\ldots < \ldots]$*;*
(iii) $\forall x_1, x_2 \in I$ *con* $x_1 \neq x_2$ $\forall t \in (0, 1)$*:* $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ $[\ldots < \ldots]$*.*

Teorema 49 (continuità e derivabilità delle funzioni convesse). *Sia* f *una funzione convessa su* I*.*
1) f *è derivabile da destra e da sinistra in ogni punto di* I^0*. In particolare:*
a) f *è continua su* I^0*;*
b) gli eventuali punti di non derivabilità di f *in* I^0 *sono tutti dei punti angolosi.*
2) Vale la seguente proprietà di monotonia:
se $x_1, x_2 \in I^0$ *e* $x_1 < x_2$*, allora* $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$*.*
3) L'insieme dei punti di non derivabilità di f *in* I^0 *è al più numerabile.*

Commento. Se f è strettamente convessa su I, le disuguaglianze in 2) diventano
$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) < f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$.

Teorema 50 (convessità e f'). *Sia* f *continua su* I *e derivabile su* I^0*. Allora sono equivalenti:*
(i) f *è convessa [strettamente convessa] su* I*;*
(ii) f' *è non decrescente [strettamente crescente] su* I^0*;*
(iii) $\forall x_0 \in I^0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$*:* $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $[\ldots < \ldots]$*.*
(Si ricordi che $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la retta tangente al grafico di f nel punto di ascisse x_0.)

Teorema 51 (convessità e f''). *Sia* f *continua su* I *e due volte derivabile su* I^0*.*
(a) f *è convessa su* I *se e solo se* $f''(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in I^0$*.*
(b) Se $f''(x) > 0$ *per ogni* $x \in I^0$*, allora* f *è strettamente convessa su* I*.*
(Ma non vale il vice versa: si consideri $f(x) = x^4$.)

Concludiamo il corso con ultimi due teoremi.

Teorema 51 (proprietà di Darboux di f'). *Se f è derivabile su I, allora f' ha la proprietà di Darboux su I (cioè, per ogni intervallo $J \subseteq I$, $f(J)$ è un intervallo.)*

Corollario 1. *Sia f derivabile in I. Allora la derivata f' non può avere in I punti di discontinuità eliminabile né di I specie.*

Corollario 2. *Sia f una funzione continua su I e derivabile in I^0. Se $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I^0$, allora f è strettamente monotona.* (Infatti, $f'(I^0)$ è un intervallo non contenente 0.)

Teorema 52 (derivate successive di f^{-1}). *Siano I un intervallo aperto, $x_0 \in I$, f una funzione continua e strettamente monotona in I, $n \in \mathbf{N}$. Se f è n volte derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è n volte derivabile in $y_0 = f(x_0)$.* [Dimostrato il caso $n = 2$.]

Un'ultima cosa: mi sono dimenticato di definire i **punti di flesso**. Ecco la definizione:

Definizione. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Diciamo che x_0 è un *punto di flesso* se esiste la retta r tangente al grafico di f nel punto di ascisse x_0 (quindi esiste $f'(x_0) \in \overline{\mathbf{R}}$), ed esiste $\delta > 0$ tale che i grafici

$$\mathrm{gr}\big(f, (x_0 - \delta, x_0)\big) \quad \text{e} \quad \mathrm{gr}\big(f, (x_0, x_0 + \delta)\big)$$

giacciano (in senso non stretto) in semipiani opposti determinati dalla retta tangente r.

Osservazione. Sono punti di flesso:
(a) tutti i punti a tangente verticale;
(b) tutti i punti di derivabilità in cui "cambia convessità in concavità (o vice versa)", cioè tali che, per un opportuno $\delta > 0$, f è convessa su uno degli intervalli $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ e concava sull'altro.

* * * * *

Le dimostrazioni richieste per l'esame sono segnate con un triangolo.