Proprietà dell'estremo superiore di R (L.V.)

Ricordiamo che abbiamo definito **R** come l'insieme degli sviluppi decimali che non finiscano con $\overline{9}$ (9 periodico). Esso, con l'ordine lessicografico, è un insieme totalmente ordinato. (È facile vedere —e ciò ci servirà più avanti— che l'ordine parziale rimane invariato se, al posto degli sviluppi che non finiscono con $\overline{9}$, consideriamo gli sviluppi che non finiscono con $\overline{0}$; in tal caso, ad esempio, $1{,}234\overline{0}$ verrebbe rappresentato come $1{,}233\overline{9}$.)

Ricordiamo anche che un numero reale che sia maggiore o uguale ad ogni elemento di un insieme E viene chiamato *maggiorante* di E. Insiemi *limitati superiormente* sono esattamente gli insiemi che ammettono maggioranti. L'estremo superiore di E è il minimo dei maggioranti di E.

Siamo pronti per dimostrare una delle proprietà più importanti di **R**, la *proprietà dell'estremo superiore*.

Teorema. *Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente di* **R** *ammette l'estremo superiore in* **R**.

Dimostrazione. Sia $E \subset \mathbf{R}$ un tale insieme. Iniziamo con l'osservare che è sufficiente dimostrare il teorema per $E \subset (0, +\infty)$. (Infatti, siccome la relazione "$\leq$" è invariante rispetto alle traslazioni, possiamo considerare, al posto di E, un suo traslato $\tilde{E}$ che interseca $(0, +\infty)$. Inoltre, $\tilde{E}$ e l'insieme $E' := \tilde{E} \cap (0, +\infty)$ hanno gli stessi maggioranti e sono non vuoti e limitati superiormente. Se dimostriamo che esiste $s = \sup E'$, si ha anche $s = \sup \tilde{E}$ e un opportuno traslato di s sarà l'estremo superiore di E.)

Sia quindi $E \subset (0, +\infty)$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. Per ogni $x \in E$, sia

$$x_0{,}x_1x_2x_3\ldots$$

il suo sviluppo decimale. Procedendo induttivamente come segue, definiamo $z_0 \in \mathbf{N}_0$, $z_1, z_2, z_3, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ e sottoinsiemi non vuoti E_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ di E.

$$z_0 := \max\{x_0 : x \in E\}, \qquad E_0 := \{x \in E : x_0 = z_0\}.$$

(Notiamo che z_0 esiste perché l'insieme $\{x_0 : x \in E\}$, cioè l'insieme delle parti intere degli elementi di E, è finito in quanto limitato e contenuto in $\mathbf{N}_0$.)

$$z_1 := \max\{x_1 : x \in E_0\}, \qquad E_1 := \{x \in E_0 : x_1 = z_1\}.$$

(Osserviamo che $E_1 = \{x \in E : x_0 = z_0,\ x_1 = z_1\}$.)

$$z_2 := \max\{x_2 : x \in E_1\}, \qquad E_2 := \{x \in E_1 : x_2 = z_2\}.$$

E così via.

Ora, l'allineamento

$$z_0{,}z_1z_2z_3\ldots$$

rappresenta un numero reale z. (Se quest'allineamento finisce con $\overline{9}$, lo sviluppo "ammissibile" di z si ottiene sostituendo i 9 finali con $\overline{0}$ e aumentando di uno la cifra appena precedente.)

Vogliamo dimostrare che $z = \sup E$. Iniziamo col dimostrare che z è un maggiorante di E. Se non fosse così, esisterebbe $x \in E$ con $x > z$. Sia k il minimo indice tale che $x_k \neq z_k$. Allora $x_k > z_k$, e $x_i = z_i$ per $0 \leq i \leq k-1$ per cui $x \in E_{k-1}$. Ma ciò è in contraddizione con la definizione di z_k come la massima k-esima cifra decimale di un elemento di E_{k-1}.

Dimostriamo ora che z è il minimo maggiorante. Sia $y \in \mathbf{R}$ tale che $y < z$ e sia

$$y_0{,}y_1y_2y_3\cdots$$

lo sviluppo decimale di y. Consideriamo il minimo $k \in \mathbf{N}_0$ tale che $y_k \neq z_k$. Ciò implica che

$$y_i = z_i \quad \text{per } 0 \leq i < k, \qquad y_k < z_k.$$

Fissiamo un qualsiasi $x \in E_k$. Esso apprtiene ad E e soddisfa

$$x_0 = z_0 = y_0, \quad x_1 = z_1 = y_1, \quad \ldots, \quad x_{k-1} = z_{k-1} = y_{k-1}, \quad x_k = z_k > y_0.$$

Di conseguenza, $x > y$ e quindi y non è un maggiorante di E. La dimostrazione è completa.