TAYLOR – svolgimento di alcuni esercizi (L.V., gennaio 2004)

1. Sia f una funzione definita e derivabile in un intervallo simmetrico (risp. a 0). Dimostrare:

(a) se f è pari, allora f' è dispari, in particolare $f'(0) = 0$;

(b) se f è dispari, allora f' è pari.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor (resto di Peano) di f, centrato nel punto x_0:

(a) $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$, 6^o ordine;

(b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/4$, 5^o ordine;

(c) $f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = 0$, 3^o ordine;

(d) $f(x) = e^{\cos x}$, $x_0 = 0$, 3^o ordine.

3. Sia f una funzione 4 volte derivabile in 0 e tale che $f(x) = 1 - 2x - 5x^2 + x^4 + o(x^4)$ (per $x \to 0$). Determinare tutte le derivate di f in 0 fino all'ordine 4 incluso.

4. Calcolare il limite $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} \right)$.

Per leggere gli svolgimenti, passate alla pagina successiva.
Comunque, vi consiglio di farlo solo dopo aver provato
a risolvere da soli gli esercizi.

Svolgimenti

1.(a) Se f è pari, allora $f'(x) = \big[f(-x)\big]' = -f'(-x)$, per cui f' è dispari. Inoltre, $f'(0) = -f'(0)$ implica $f'(0) = 0$.

1.(b) f dispari $\Rightarrow$ $f'(x) = \big[-f(-x)\big]' = f'(-x)$.

2.(a) $\tan x$ è dispari, per cui (dall'esercizio precedente), il suo sviluppo di Taylor in 0 contiene soltanto termini di grado dispari:

$$\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6).$$

Moltiplicando per $\cos x$ e sostituendo gli sviluppi di $\sin x$ e $\cos x$, otteniamo

$$\big(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)\big)\left(1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + o(x^6)\right) = \left(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + o(x^6)\right).$$

Confrontiamo i coefficienti di ogni potenza di x a entrambi i lati.

- coeff. di x: $a = 1$;
- coeff. di x^3: $-\frac{a}{2!} + b = -\frac{1}{3!} \Rightarrow b = \frac{a}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$;
- coeff. di x^5: $\frac{a}{4!} - \frac{b}{2!} + c = \frac{1}{5!} \Rightarrow c = \frac{1}{120} - \frac{a}{24} + \frac{b}{2} = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$.

Conclusione:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o(x^6).$$

2.(b) Se $x \to \pi/4$, allora $(x - \pi/4) \to 0$. Allora

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\big(\pi/4 + (x - \pi/4)\big) = \sin(\pi/4)\cos(x - \pi/4) + \cos(\pi/4)\sin(x - \pi/4)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos(x - \pi/4) + \sin(x - \pi/4)\big)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + (x - \tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{2!}(x - \tfrac{\pi}{4})^2 - \tfrac{1}{3!}(x - \tfrac{\pi}{4})^3 + \tfrac{1}{4!}(x - \tfrac{\pi}{4})^4 + \tfrac{1}{5!}(x - \tfrac{\pi}{4})^5\right]\\ &\quad + o\big((x - \tfrac{\pi}{4})^5\big).\end{aligned}$$

2.(c) $\sin x \to 0$ per $x \to 0$, per cui possiamo utilizzare lo sviluppo di e^t per $t \to 0$. Essendo $\sin x \sim x$, abbiamo $o(\sin^3 x) = o(x^3)$.

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^3 x)\\ &= 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^3).\end{aligned}$$

Lo sviluppo richiesto si ottiene sostituendo i seguenti sviluppi delle potenze di $\sin x$:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\\ \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^2 + o(x^3)\\ \sin^3 x &= \big(x^2 + o(x^3)\big)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

(lascio a voi il completamento dei conti).

2.(d) Visto che $\cos x \to 1$ per $x \to 0$, non possiamo utilizzare direttamente lo sviluppo di e^t per $t \to 0$ (abbiamo bisogno dello sviluppo di e^t per $t \to 1$). Inoltre, $(\cos x - 1)^2 \sim (\frac{-x^2}{2})^2 = o(x^3)$.

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e^{1+(\cos x - 1)} = e \cdot e^{\cos x - 1} = e\left[1 + (\cos x - 1) + o(x^3)\right] \\ &= e\left[1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right]. \end{aligned}$$

3. Per $x \to 0$, $f(x) = 1 - 2x - 5x^2 + x^4 + o(x^4)$. Ma anche,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 + o(x^4)$$

(formula di Taylor). Confrontando i coefficienti, si ottiene:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -2,\ f''(0) = -10,\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 24.$$

4. Per $x \to 0$,

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\sin^3 - x^3}{x^3 \sin^3 x} \sim \frac{\sin^3 - x^3}{x^6} =: (*).$$

Ne segue che, bisogna trovare lo sviluppo di $\sin^3 x$ arrestato al 6^o ordine:

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \\ &= x^3 - \frac{3x^5}{6} + o(x^6). \end{aligned}$$

Otteniamo $(*) = -\frac{3}{6x} + o(1)$, per cui il nostro limite non esiste (essendo i limiti destro e sinistro diversi fra loro).