Un "paradosso" di decomposizione via punti fissi

(L.V., 11-06-2001)

In questo breve testo dimostriamo un teorema di decomposizione simile al famoso paradosso di Banach-Tarski, usando un semplice teorema del punto fisso. L'articolo originale è:

V. KLEE & J. R. REAY, *A surprizing but easily proved Geometric Decomposition Theorem*, Math. Magazine **71** (1998), 3-11.

Con *reticolo completo* intendiamo un insieme parzialmente ordinato $(S,\leq)$ tale che ogni suo sottoinsieme non vuoto ammette sia l'estremo superiore (cioè, il minimo dei maggioranti) sia l'estremo inferiore (cioè, il massimo dei minoranti).

Teorema di Birkhoff. *Ogni funzione monotona non decrescente da un reticolo completo in sé ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Sia $F:S\to S$ non decrescente, dove S è il reticolo completo. Denotiamo con μ l'estremo inferiore di S (e quindi il minimo di S). L'insieme $A:=\{x\in S:\ x \leq F(x)\}$ non è vuoto perché contiene μ. Denotiamo $\sigma:=\sup(A)$. Dimostreremo che σ è un punto fisso per F.

Se $x\in A$, essendo $x \leq \sigma$, si ha $x \leq F(x) \leq F(\sigma)$. Allora $F(\sigma)$ è un maggiorante per A, per cui $\sigma \leq F(\sigma)$ (σ è il minore dei maggioranti!).

Dall'altra parte, la monotonia di F implica $F(\sigma) \leq F(F(\sigma))$, cioè, anche $F(\sigma)$ appartiene ad A. Perciò $F(\sigma) \leq \sigma$. ÿ

Commento. Osserviamo che nella dimostrazione abbiamo usato soltanto l'esistenza del punto minimo di tutto S e l'esistenza, per ogni $A\subset S$, di $\sup(A)$. Per cui il teorema di Birkhoff può essere enunciato nella seguente forma più generale:

Siano S *un insieme parzialmente ordinato e* $F:S\to S$ *una funzione non decrescente. Supponiamo che esista un punto* $b\in S$ *con le proprietà:*

1) $b \leq F(b)$; *2) per ogni insieme* $A \subset S' := \{x\in S: b \leq x\}$ *esiste* $\sup(A)$ *in* S.

Allora F *ha un punto fisso.*

(Dimostrazione: uguale a quella del Teorema di Birkhoff, con S' al posto di S.)

Dal teorema di Birkhoff dedurremo una versione forte del famoso teorema di Cantor-Bernstein (*se* A *e* B *sono due insiemi tali che esistano funzioni iniettive* $f:A\to B$ *e* $g:B\to A$, *allora esiste una corrispondenza biunivoca fra* A *e* B); questa versione specifica che la corrispondenza biunivoca fra i due insiemi può essere costruita usando le due funzioni iniettive.

Teorema CB. *Siano* $f:A\to B$ *e* $g:B\to A$ *due funzioni iniettive fra due insiemi* A,B. *Allora esistono insiemi* A_1 , A_2 , B_1 *e* B_2 *tali che:*

1. $A=A_1\cup A_2$, $B=B_1\cup B_2$ *e le due unioni sono disgiunte*;
2. $f(A_1)=B_1$, $g(B_2)=A_2$.

(*In particolare, la funzione* $h:A\to B$, *data da* $h(a)=f(a)$ *per* $a\in A_1$, $h(a)=g^{-1}(a)$ *per* $a\in A_2$, *è una corrispondenza biunivoca fra* A *e* B.)

Dimostrazione. Per un insieme X denotiamo con $\wp(X)$ l'insieme delle parti di X. È facile vedere che, ordinato con l'inclusione, $\wp(X)$ è un reticolo completo.

Definiamo $F:\wp(A)\to\wp(A)$ con $F(U) = A \setminus g(B \setminus f(U))$. Siccome F è monotona non decrescente (facile!), per il teorema di Birkhoff esiste $V\in\wp(A)$ tale che

$$(*) \qquad V = F(V) = A \setminus g(B \setminus f(V)).$$

Allora gli insiemi $A_1:=V$, $B_1:=f(V)$, $B_2:=B \setminus F(V)$, $A_2:=A \setminus V$ soddisfano la tesi del teorema perché (*) equivale a dire che $g(B \setminus F(V)) = A \setminus V$, cioè, $g(B_2)=A_2$. ÿ

Diremo che due sottoinsiemi A e B di uno spazio vettoriale X sono *omotetici* (e scriveremo $A\sim B$) se esiste una omotetia non costante $H:X\to X$ (cioè, $H(x)=\alpha x+b$ con α scalare non nullo e $b\in X$) tale che $H(A)=B$. (Notiamo che "~" è una relazione di equivalenza su $\wp(X)$.)

Teorema di decomposizione. *Siano* A *e* B *due sottoinsiemi limitati a interno non vuoto di uno spazio normato* X. *Allora esistono decomposizioni* $A=A_1\cup A_2$ *e* $B=B_1\cup B_2$ *(unioni disgiunte) di* A *e di* B *per le quali* A_i *e* B_i *sono omotetici per* $i=1,2$.

Dimostrazione. Siano $a\in A$, $b\in B$, $r,r',R,R'\in(0,+\infty)$ tali che

$$B(a,r) \subset A \subset B(a,R) \quad \text{e} \quad B(b,r') \subset B \subset B(b,R')$$

($B(c,\rho)$ denota la bolla chiusa di raggio ρ centrata in c). È facile verificare che le funzioni

$$f(x)=b+(r'/R)(x-a) \quad \text{e} \quad g(x)=a+(r/R')(x-b)$$

sono omotetie iniettive (e suriettive) su X tali che $f(B(a,R))=B(b,r')$ e $g(B(b,R'))=B(a,r)$. Per cui $f(A) \subset B$ e $g(B) \subset A$. Per completare la dimostrazione, è sufficiente applicare il Teorema BC. ÿ

Concludiamo ricordando il famoso **Paradosso di Banach-Tarski**: *Siano* A *e* B *due insiemi limitati a interno non vuoto in* $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$). *Allora, per un opportuno* $k\in\mathbf{N}$, *essi ammettono decomposizioni* $A=A_1\cup\ldots\cup A_k$, $B=B_1\cup\ldots\cup B_k$ *(unioni disgiunte) tali che, per ogni* i, *esiste un "moto rigido" che trasforma* A_i *in* B_i .