Insiemi di Borel in spazi di Banach

L'argomento che volevo trattare in questo seminario è il rapporto che intercorre tra gli insiemi di Borel generati dalla topologia debole di uno spazio di Banach e quelli generati dalla topologia forte. In particolare volevo presentare alcuni risultati classici che riguardano i seguenti due problemi:

- quando vale che $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$?
- quando accade che $X \in \mathrm{Borel}(X^{**}, w^*)$?

1 Primi risultati positivi

Iniziamo mostrando che le nostre domande sono ben poste, ovvero esiste una classe di spazi di Banach per la quale hanno risposta positiva. Il risultato che qui vado a presentare è dovuto ad Edgar e Schachemayer e può essere trovato nella forma che qui riporto in [Edg79], una dimostrazione precedente, priva del lemma di Schachermayer e dovuta ad Edgar, si può trovare in [Edg77].

Lemma 1.1 (Schachermayer) *Sia X uno spazio di Banach e τ una topologia localmente convessa tale che $\mathcal{B}_X$ sia τ-chiusa. La mappa*

$$\psi_\tau : (0, +\infty) \times \mathcal{S}_X \longrightarrow X \setminus \{0\}$$

definita da $\psi_\tau(t, x) = tx$ è un isomorfismo di Borel tra $(0, +\infty) \times \mathcal{S}_X$ con la σ-algebra prodotto $\mathrm{Borel}((0, +\infty)) \times \mathrm{Borel}(\mathcal{S}_X, \tau)$ e $X \setminus \{0\}$ con la σ-algebra $\mathrm{Borel}(X \setminus \{0\}, \tau)$.

Dimostrazione La mappa $(t, x) \mapsto tx$ è continua e dunque Borel-misurabile. L'inversa $x \mapsto \left(\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\right)$ ha la prima coordinata inferiormente semicontinua e dunque Borel-misurabile. La seconda coordinata è la composizione di una mappa di Borel con una mappa continua

$$x \mapsto (\|x\|, x) \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

□

Corollario 1.2 *Sia $Y \subseteq X$ sottospazio. $Y \in \mathrm{Borel}(X, \tau)$ se e solo se $Y \cap \mathcal{S}_X \in \mathrm{Borel}(\mathcal{S}_X, \tau)$.*

Corollario 1.3 *Se X è uno spazio di Banach che ammette un rinormamento di Kadets, allora $X \in \mathrm{Borel}(X^{**}, w^*)$.*

Dimostrazione Basta mostrare che $\mathcal{S}_X \in \mathrm{Borel}(\mathcal{S}_{X^{**}}, w^*)$, per il corollario precedente. Per ipotesi $(\mathcal{S}_X, w) = (\mathcal{S}_X, \|\cdot\|)$ dunque è topologicamente un metrico completo, di conseguenza è un $\mathcal{G}_\delta$ in

$$\overline{\mathcal{S}_X}^{w^*} = \mathcal{B}_{X^{**}}$$

per il teorema di Goldstine, si veda [Dug66]. Ciò implica che $\mathcal{S}_X$ è un $\mathcal{G}_\delta$ in $(\mathcal{B}_{X^{**}}, w^*)$. □

Corollario 1.4 *Se X è uno spazio di Banach che ammette un rinormamento di Kadets, allora* $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$. *Se X^* ammette una norma w^*-Kadets allora* $\mathrm{Borel}(X^*, w^*) = \mathrm{Borel}(X^*, \|\cdot\|)$.

Dimostrazione Per ipotesi $id : (\mathcal{S}_X, w) \to (\mathcal{S}_X, \|\cdot\|)$ è un omeomorfismo, dunque

$$\begin{aligned} id :& (X \setminus \{0\}, w) \xrightarrow{\psi_w^{-1}} (0, +\infty) \times (\mathcal{S}_X, w) \xrightarrow{(id,id)} \\ &\longrightarrow (0, +\infty) \times (\mathcal{S}_X, \|\cdot\|) \xrightarrow{\psi_{\|\cdot\|}} (X \setminus \{0\}, \|\cdot\|) \end{aligned}$$

l'identità è un isomorfismo di Borel. Il caso debole-star è analogo. □

Questo risultato permette di concludere un fatto interessante riguardo alle misure di probabilità, Borel e regolari su uno spazio di Banach X.

Corollario 1.5 *Sia X uno spazio di Banach. Ogni misura di probabilità μ, w-Borel e regolare su X può essere estesa a una misura di probabilità $\overline{\mu}$, $\|\cdot\|$-Borel e regolare.*

Dimostrazione Supponiamo che μ sia una misura di probabilità, w-Borel e regolare su X, per un risultato classico di Grothendieck, si veda [Lin72, Theorem 4.3] esiste un sottospazio separabile $X_1 \subseteq X$ tale che $\mu(X_1) = 1$. Siccome gli spazi separabili sono Kadets-rinormabili abbiamo che $\mathrm{Borel}(X_1, w) = \mathrm{Borel}(X_1, \|\cdot\|)$. Allora possiamo definire

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A \cap X_1)$$

per $A \in \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$. Ma ogni misura di Borel definita su uno spazio metrico completo è regolare, si veda [Hal50]. □

Abbiamo quindi un'ampia classe di spazi per la quale le nostre domande hanno risposta affermativa. Passiamo ora a mostrare che vi sono anche degli spazi per cui le nostre domande hanno risposta negativa.

2 Controesempio principale: ℓ_∞

L'esempio che vado ad illustrare è dovuto a Talagrand ed è del 1978, è possibile reperirlo in [Tal78]. Sappiamo che possiamo identificare lo spazio ℓ_∞ con $\mathscr{C}(\beta\mathbb{N})$, lo spazio delle funzioni continue definite sulla compattificazione di Čech–Stone dei naturali a valori reali.[1] Poniamo

$$\begin{aligned} E &= \{f \in \ell_\infty \mid f \text{ assume solo i valori } 0 \text{ e } 1\}, \\ F &= \{f : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \text{ assume solo i valori } 0 \text{ e } 1 \text{ ed è di Borel}\}, \end{aligned}$$

è ovvio che $F \subseteq \ell_\infty^{**}$. Dato $A \subseteq \mathbb{N}$ indicheremo con $R_A(f)$ la restrizione di una funzione $f \in F$ alla chiusura di A in $\beta\mathbb{N}$, per convenzione avremo

$$R_A^{-1}(R_A(f)) \subseteq F.$$

[1] Per una definizione della compattificazione di Čech–Stone si veda [Dug66].

Infine poniamo $\tau = \sigma(\ell_\infty^{**}, \ell_1)$. La costruzione che stiamo per fare si basa in sostanza sul seguente lemma di cui non riporto la dimostrazione siccome è molto tecnica.

Lemma 2.1 (Talagrand, [Tal78]) *Se $G \in \mathrm{Borel}(F, w^*)$ allora esistono:*

- $A \subseteq \mathbb{N}$ *a complementare infinito;*
- $g \in E$*;*
- $H \in \mathrm{Borel}(\ell_\infty^{**}, \tau)$,

tali che $R_A^{-1}(R_A(g)) \cap G = R_A^{-1}(R_A(g)) \cap H$.

Teorema 2.2 *Esiste $Z \subseteq E$ (quindi un sottoinsieme chiuso e discreto per la topologia della norma) tale che $Z \notin \mathrm{Borel}(\ell_\infty, w)$.*

Dimostrazione Osserviamo che siccome τ ha una network numerabile allora

$$\left|[\mathbb{N}]^{(\omega)}\right| = |E| = |\mathrm{Borel}(\ell_\infty^{**}, \tau)| = \mathfrak{c},$$

dove $[\mathbb{N}]^{(\omega)}$ è l'insieme dei sottoinsiemi dei naturali a complementare infinito.[2] Ordiniamo tutte le terne possibili per ottenere $(A_\alpha, g_\alpha, H_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ dove γ è il primo ordinale che segue l'ordinale corrispondente alla potenza del continuo. Per induzione transfinita costruiamo $(f_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ e $(f'_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ sottinsiemi di E tali che

- $f_\alpha \in R_{A_\alpha}^{-1}(R_{A_\alpha}(g_\alpha)) \cap H_\alpha^{\complement} \cap \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \left\{f'_\beta\right\}\right)^{\complement} \cap E$;
- $f'_\alpha \in R_{A_\alpha}^{-1}(R_{A_\alpha}(g_\alpha)) \cap \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \left\{f_\beta, f'_\beta\right\} \cup \{f_\alpha\}\right)^{\complement} \cap E$.

La possibilità di costruzione ci è fornita dal fatto che $R_{A_\alpha}^{-1}(R_{A_\alpha}(g_\alpha)) \cap E$ ha la cardinalità del continuo, mentre $\{f_\beta\}$ e $\{f'_\beta\}$ hanno sempre cardinalità inferiore.

Dimostriamo ora che l'insieme da noi cercato è $Z = \{f_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$. Se fosse un insieme di Borel potremmo applicare il lemma ottenendo una terna (A, g, H) tale che

$$R_A^{-1}(R_A(g)) \cap Z = R_A^{-1}(R_A(g)) \cap H.$$

Se fissiamo $\delta < \gamma$ tale che $A_\delta = A$ e $g_\delta = g$ allora

$$f'_\delta \in R_A^{-1}(R_A(g)) \cap E \cap Z^{\complement} = R_A^{-1}(R_A(g)) \cap E \cap H^{\complement}.$$

Da ciò l'insieme $R_A^{-1}(R_A(g)) \cap E \cap Z^{\complement}$ ha la cardinalità del continuo, in particolare non è vuoto. Ma se $(A, g, H) = (A_\alpha, g_\alpha, H_\alpha)$ allora per costruzione

$$f_\alpha \in R_A^{-1}(R_A(g)) \cap E \cap H^{\complement} = R_A^{-1}(R_A(g)) \cap E \cap Z^{\complement},$$

il che è assurdo. $\square$

Teorema 2.3 $\ell_\infty \notin \mathrm{Borel}(\ell_\infty^{**}, w^*)$.

[2] Per il fatto che $|\mathrm{Borel}(\ell_\infty^{**}, \tau)| = \mathfrak{c}$ si veda [Fre03].

Dimostrazione È sufficiente mostrare che $E \notin \text{Borel}(F, w^*)$, siccome $F \cap \ell_\infty = E$. Se E fosse un insieme di Borel potremmo applicare il lemma ed ottenere una terna (A, g, H) tale che

$$R_A^{-1}(R_A(g)) \cap E = R_A^{-1}(R_A(g)) \cap H.$$

Ma poiché il complementare di A è infinito, esiste $f \in F \setminus E$ tale che $R_A(f) = R_A(g)$ e $f_{|\mathbb{N}} = g_{|\mathbb{N}}$. Siccome $g \in E$ la definizione di τ, in pratica ogni aperto (chiuso) di tale topologia contiene tutti gli elementi che hanno la stessa traccia sui naturali, mostra che $f \in H$, il che è assurdo. □

Un'osservazione di Burke e Pol in [BP03] permette di affermare quanto segue.

Proposizione 2.4 *ℓ_∞ è l'intersezione di $2^{\aleph_0}$ insiemi di Borel di (ℓ_∞^{**}, w^*).*

Dimostrazione Consideriamo ℓ_∞ con la topologia della convergenza per coordinate τ_p. Sia

$$u : (\mathscr{C}(\beta\mathbb{N})^{**}, w^*) \longrightarrow (\ell_\infty, \tau_p)$$

l'applicazione definita da $u(\phi) = (\delta_n(\phi))_{n\in\mathbb{N}}$ dove δ_n sono i funzionali coordinata. Tale applicazione è una suriezione continua. Sia $y \in \ell_\infty$ e βy la sua estensione di Čech–Stone a $\beta\mathbb{N}$, poniamo

$$B(y) = \mathscr{C}(\beta\mathbb{N})^{**} \setminus \big(u^{-1}(y) \setminus \{\beta y\}\big).$$

Tali insiemi sono di Borel in $(\mathscr{C}(\beta\mathbb{N})^{**}, w^*)$ e

$$\mathscr{C}(\beta\mathbb{N}) = \bigcap_{y\in\Lambda} B(y).$$

□

Non è sempre detto che accada una situazione simile infatti, sempre in [BP03], Burke e Pol provano che ℓ_∞/c_0 non è esprimibile come intersezione di $2^{\aleph_0}$ insiemi di Borel in $((\ell_\infty/c_0)^{**}, w^*)$ se si assume l'ipotesi del continuo.

3 Altri controesempi

Dobbiamo avvertire tutti i sostenitori della topologia debole-star che purtroppo le cose non migliorano con il passaggio a tale topologia. Abbiamo i seguenti controesempi. Iniziamo citando un risultato di Christensen del 1971 che si permette di ottenere un risultato un po' più generale del corrispettivo risultato di Edgar, in [Edg77].

Teorema 3.1 ([Chr71]) *Sia (S, Σ, μ) uno spazio con misura positiva e σ-finita. Se $x^* \in \mathrm{L}_\infty^*(S, \Sigma, \mu)$ è debolmente-star Borel-misurabile, allora $x^* \in \mathrm{L}^1(S, \Sigma, \mu)$.*

Questo permette di ottenere che

$$\text{Borel}(\mathrm{L}_\infty(S, \Sigma, \mu), w^*) \subsetneqq \text{Borel}(\mathrm{L}_\infty(S, \Sigma, \mu), \|\cdot\|);$$
$$\text{Borel}(\mathrm{L}_\infty(S, \Sigma, \mu), w^*) \subsetneqq \text{Borel}(\mathrm{L}_\infty(S, \Sigma, \mu), w).$$

Il prossimo controesempio mostra come quando siamo in presenza di spazi con la proprietà di Radon-Nikodým le cose non vadano meglio.

Proposizione 3.2 ([Edg80]) *Esiste un sottoinsieme debolmente di Borel di $J(\omega_1)$ che non è debolmente-star di Borel.*

Dimostrazione Ricordiamo che per ogni ordinale η lo spazio di James di lunghezza η è definito come

$$J(\eta) = \left\{ f : [0, \eta] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ è continua } f(0) = 0 \text{ e } \|f\|_{J(\eta)} < +\infty \right\}$$

con

$$\|f\|_{J(\eta)} = \sup \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i) - f(\alpha_{i-1})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove l'estremo superiore è calcolato su tutte le successioni finite $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ in $[0, \eta]$. Una base transfinita di $J(\eta)$ è costituita dalle funzioni $h_\alpha = \chi_{(\alpha,\eta]}$ per $\alpha \in [0, \eta]$.

Consideriamo ora $J(\omega_1)$ e l'insieme $R = \{h_\alpha \mid \alpha \in [0, \omega_1]\}$. Sappiamo che (R, w^*) è omeomorfo a $[0, \omega_1]$ e di conseguenza contiene degli insiemi che non sono di Borel. Ma se indichiamo con e_α i funzionali coordinata allora per $\alpha < \omega_1$

$$\left\{ f \in R \,\middle|\, (e_{\alpha+1} - e_\alpha)(f) > \frac{1}{2} \right\} = \{h_\alpha\}$$

mentre $\left\{ f \in R \,\middle|\, e_{\omega_1}(f) < \frac{1}{2} \right\} = \{h_{\omega_1}\}$. Di conseguenza ogni sottoinsieme di R è un chiuso-aperto debole. $\square$

È noto che $J(\omega_1)$ è duale di uno spazio di Asplund, di conseguenza ammette un rinormamento di tipo LUR, si veda [DGZ93]. Questo implica, per il risultato di Edgar–Schachermayer, che $\mathrm{Borel}(J(\omega_1), w) = \mathrm{Borel}(J(\omega_1), \|\cdot\|)$.

Ci troviamo di fronte alla seguente casistica:

1. $\mathrm{Borel}(\ell_\infty, w^*) \subsetneqq \mathrm{Borel}(\ell_\infty, w) \subsetneqq \mathrm{Borel}(\ell_\infty, \|\cdot\|)$;
2. $\mathrm{Borel}(J(\omega_1), w^*) \subsetneqq \mathrm{Borel}(J(\omega_1), w) = \mathrm{Borel}(J(\omega_1), \|\cdot\|)$;
3. $\mathrm{Borel}(\mathscr{C}^*(K), w^*) = \mathrm{Borel}(\mathscr{C}^*(K), w) = \mathrm{Borel}(\mathscr{C}^*(K), \|\cdot\|)$ se $K^{(\omega_1)} \neq \emptyset$, in realtà al posto di $\mathscr{C}(K)$ è possibile sotituire qualsiasi spazio che ammette un rinormamente w^*-Kadets.

Non sono però a conoscenza di spazi di Banach duali X^* per cui valga

$$\mathrm{Borel}(X^*, w^*) = \mathrm{Borel}(X^*, w) \subsetneqq \mathrm{Borel}(X^*, \|\cdot\|).$$

4 Risultati più fini

Volevo ora analizzare due dimostrazioni, la prima che risponde alla prima domanda e la seconda che risponde alla seconda, che rientrano però nei casi già trattati dal teorema di Edgar–Schachermayer.

Proposizione 4.1 *Sia X uno spazio di Banach separabile. Ogni aperto forte è un $\mathcal{F}_\sigma$ debole.*

Dimostrazione Ricordiamo che le bolle chiuse sono anche dei chiusi deboli. Fissato un aperto forte $A \subseteq X$, sia (x_n) una successione densa in A e consideriamo

$$(\overline{\mathcal{B}_{\frac{1}{m}}(x_n)})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}.$$

Riordiniamoli in modo che la successione dipenda da un solo indice e chiamiamo la nuova successione $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sia A un aperto forte, sappiamo che per ogni $x \in A$ esiste k_x tale che $x \in A_{k_x} \subseteq A$. Ma allora

$$A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in A} A_{k_x} \subseteq A,$$

ma in realtà l'unione è al più numerabile. □

Passiamo ora ad un teorema classico di Talagrand del 1975, si veda [Tal75].

Teorema 4.2 *Sia Y uno spazio di Banach e $X \subseteq Y^*$ sottospazio chiuso. Se X è WCG allora X è un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$ in (Y^*, w^*).*

Dimostrazione Sia $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ una successione di compatti deboli che genera X. Ovviamente $K_n \subseteq Y^*$ è w^*-compatto, abbiamo quindi

$$X = \bigcap_{m=1}^{+\infty}\left(X + \frac{1}{m}\mathcal{B}_{Y^*}\right) \supseteq \bigcap_{m=1}^{+\infty}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n\right) + \frac{1}{m}\mathcal{B}_{Y^*}\right) \supseteq$$
$$\supseteq \bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(K_n + \frac{1}{m}\mathcal{B}_{Y^*}\right) \supseteq X.$$

Che è la tesi. □

In particolare ciò afferma che se X è WCG allora $X \in \mathrm{Borel}(X^{**}, w^*)$. In realtà, in [Vaš81], Vašák osserva che utilizzando un risultato di Frolík, presente in [Fro62], è possibile ottenere che

se X è $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$ in (X^{**}, w^*) allora X è WCD.

Dove diciamo che X è WCD (*weakly countably determined*) se esiste una successione di w^*-compatti $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in X^{**} tale che per ogni $x \in X$ esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che

$$x \in \bigcap_{n\in A} K_i \subseteq X.$$

La domanda se vale anche il viceversa è, per la mia conoscienza, ancora un problema aperto.

Osservando tali risultati sembra una buona idea supporre che il nostro spazio abbia una decomposizione numerabile che sia in qualche modo buona. Effettivamente una buona proprietà è la seguente.

Definizione 4.3 ([Raj99]) *Siano τ_1 e τ_2 due topologie su un insieme X. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ gode della proprietà $P(\tau_1, \tau_2)$ se esiste una successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che la famiglia $(A_n \cap U)_{n\in\mathbb{N}, U\in\tau_2}$ sia una network di τ_1.*

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.4 *Siano τ_1, τ_2 e τ_3 tre topologie sull'insieme X. Se $A \subseteq X$ allora*

1. *se A ha $P(\tau_1, \tau_2)$ e $B \subseteq A$ allora B ha $P(\tau_1, \tau_2)$;*
2. *se A ha $P(\tau_1, \tau_2)$ e $P(\tau_2, \tau_3)$ allora A ha $P(\tau_1, \tau_3)$;*
3. *se A ha $P(\tau_1, \tau_2)$ e ogni punto di A ha una τ_1-base costituita da τ_2-chiusi allora (A_n) può essere scelta in modo tale che tutti gli A_n siano τ_2-chiusi;*
4. *se A ha $P(\tau_1, \tau_2)$ con gli insiemi A_n di Borel rispetto a τ_2 allora per ogni τ_1-aperto V tale che $A \subseteq V$ esiste un insieme di Borel rispetto a τ_2 tale che*
$$A \subseteq B \subseteq V.$$

Dimostrazione Sono ovvie 1 e 2.

3. Sia $x \in A$ e $V \in \tau_1$ con $x \in V$. Sia inoltre $V_0 \in \tau_1$ tale che $x \in V_0 \subseteq \overline{V_0}^{\tau_2} \subseteq V$. Sappiamo che esistono $n \in \mathbb{N}$ e $U \in \tau_2$ tale che $x \in A_n \cap U \subseteq V_0$, ma
$$x \in A_n \cap U \subseteq \overline{A_n}^{\tau_2} \cap U \subseteq \overline{A_n \cap U}^{\tau_2} \subseteq \overline{V_0}^{\tau_2} \subseteq V.$$

4. Per ogni $x \in A$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ e $U_x \in \tau_2$ tale che $x \in A_{n_x} \cap U_x \subseteq V$. Segue
$$A = \bigcup_{x\in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in A} (A_{n_x} \cap U_x) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cap \bigcup_{n_x=n} U_x \right) = B \subseteq V.$$
Ovviamente B è un insieme di Borel rispetto a τ_2. Osserviamo che questo implica che ogni τ_1-aperto e $\mathcal{G}_\delta$ rispetto a τ_1 sono insiemi di Borel rispetto a τ_2. □

Vediamo come tali proprietà ci permettono di concludere alcuni interessanti risultati, addirittura in spazi metrici.

Teorema 4.5 *Sia (Y, τ) uno spazio topologico e d una metrica su Y più forte della topologia τ, tale che le d-bolle siano τ-chiuse. Se $X \subseteq Y$ ha $P(d, \tau)$, allora*

1. $\mathrm{Borel}(X, \tau) = \mathrm{Borel}(X, d)$;
2. *se X è d-chiuso in Y, allora $X \in \mathrm{Borel}(Y, \tau)$.*

Dimostrazione

1. Ovviamente $\mathrm{Borel}(X, \tau) \subseteq \mathrm{Borel}(X, d)$. Sia $V \subseteq X$ un d-aperto, esso ha $P(d, \tau)$. Possiamo applicare 3 della proposizione precedente siccome le d-bolle sono τ-chiuse. Utilizzando 4 abbiamo la tesi. Osserviamo inoltre che otteniamo che ogni d-aperto è un $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})_\sigma$ rispetto a τ.
2. Siccome siamo in uno spazio metrico, sappiamo che X è un $\mathcal{G}_\delta$ in (Y, d). La tesi segue dai punti 3 e 4 della proposizione precedente. Otteniamo in più che X è un $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})_{\sigma\delta}$ rispetto a τ. □

Dal punto di vista degli spazi di Banach otteniamo il seguente risultato.

Corollario 4.6 *Sia X uno spazio di Banach e τ una topologia vettoriale più debole della topologia della norma, tale che $\overline{\mathcal{B}_X}^\tau$ sia limitata. Segue*

1. *se X ha $P(\|\cdot\|, \tau)$, allora $\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|) = \mathrm{Borel}(X, \tau)$, di più ogni aperto forte è un $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})_\sigma$ rispetto a τ;*
2. *se X ha $P(\|\cdot\|, w)$, allora $X \in \mathrm{Borel}(X^{**}, w^*)$, di più X è un $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})_{\sigma\delta}$ rispetto alla topologia debole-star.*

Dimostrazione $\overline{\mathcal{B}_X}^\tau$ è la bolla di una norma equivalente con bolle chiuse che sono τ-chiuse. □

Alla fine del suo articolo, [Raj99], Raja mostra il seguente teorema.

Teorema 4.7 *Sia X uno spazio di Banach e τ una topologia vettoriale più debole della topologia della norma, tale che $\overline{\mathcal{B}_X}^\tau$ sia limitata. X ammette un rinormamento τ-Kadets se e solo se X ha $P(\|\cdot\|, \tau)$ per una successione (A_n) di insiemi convessi.*

Putroppo ancora oggi, non si è a conoscenza di spazi che godano della proprietà $P(\|\cdot\|, w)$ ma non siano Kadets-rinormabili.

5 Possibili inversioni

Abbiamo visto come il fatto che uno spazio abbia un rinormamento di tipo Kadets sia strettamente collegato alla possibilità di avere

$$\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|).$$

Anzi abbiamo ottenuto di più, infatti con i risultati di Raja è stato semplice mostrare che in caso di esistenza di una norma equivalente di Kadec allora ogni aperto forte è un $(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})_\sigma$ debole. È naturale chiedersi se vale il viceversa. Il risultato migliore che sono riuscito a reperire è presente in un recente articolo di Marciszewski e Pol, [MP09, Corollary 4.2], ed è un risultato di consistenza.

Teorema 5.1 *È consistente con* ZFC *che esista un compatto scattered K tale che in $\mathscr{C}(K)$ gli aperti forti siano $\mathcal{F}_\sigma$ deboli, ma che contenga un insieme discreto rispetto alla topologia della norma che non sia unione numerabile di insiemi debolmente scattered. In particolare $\mathscr{C}(K)$ non ammette un rinormamento Kadets.*

La dimostrazione di tale fatto si basa su alcuni risultati molto profondi, il primo è il seguente teorema di Todorčević.

Teorema 5.2 ([Tod05]) *È consistente con* ZFC *che esista un compatto scattered T di cardinalità minore di $\mathfrak{p}$ tale che lo spazio di funzioni $(\mathscr{C}(T,2),\tau_p)$ non sia unione numerabile di sottospazi scattered.*

Dove $2=\{0,1\}$, τ_p è la topologia della convergenza puntuale e $\mathfrak{p}$ è un cardinale la cui definizione può essere trovata in [Fre84].

Dimostrazione (Teorema 5.1) Sia T lo spazio di Todorčević del teorema precedente. Siccome $|T|<\mathfrak{p}$ allora esiste una suriezione continua f da $\mathbb{N}^*=\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ a T, [Fre84, Corollary 26I]. Poniamo

$$K=T\cup\mathbb{N}$$

che è il risultato di incollare $\mathbb{N}$ a T attraverso la suriezione f. K è separabile, siccome immagine continua di $\beta\mathbb{N}$, e scattered. Per [MP09, Lemma 3.1] è sufficiente mostrare il teorema per $\mathscr{C}(K,E)$ per ogni $E\subseteq\mathbb{R}$ finito. Consideriamo l'applicazione

$$\phi:\mathscr{C}(K,E)\longrightarrow E^{\mathbb{N}}$$

definita da $\phi(f)=f_{|\mathbb{N}}$. Tale mappa è τ_p continua e iniettiva, essendo $\mathbb{N}$ denso in K. Siccome $H=\phi(\mathscr{C}(K,E))$ è un sottoinsieme di $E^{\mathbb{N}}$ di cardinalità minore a $\mathfrak{p}$, allora tutti i sottoinsiemi di H sono $\mathcal{F}_\sigma$, si veda [Fre84, Corollary 23B]. Grazie all'iniettività di ϕ abbiamo che $\phi^{-1}(\phi(S))=S$ per ogni $S\subseteq\mathscr{C}(K,E)$ e dunque ogni sottoinsieme di $\mathscr{C}(K,E)$ è un $\mathcal{F}_\sigma$ in $(\mathscr{C}(T,E),\tau_p)$, per la continuità di ϕ. Da ciò otteniamo la prima parte del teorema.

Per verificare la seconda parte abbiamo bisogno di un risultato di Hansell [Han01]. Vogliamo mostrare che lo spazio $(\mathscr{C}(K,2),\tau_p)$ non è σ-scattered, siccome tale spazio è discreto nella topologia della norma abbiamo la nostra tesi. La mappa

$$f\mapsto(f_{|T},f_{|\mathbb{N}})$$

immerge $(\mathscr{C}(K,2),\tau_p)$ suriettivamente in $\mathcal{S}$ sottospazio del prodotto $(\mathscr{C}(T,2),\tau_p)\times 2^\omega$, la cui proiezione sul primo asse è $\mathscr{C}(T,2)$ che per il risultato di Todorčević non è σ-scattered. Ma sappiamo per [Han01, Lemma 7.1] che la proiezione parallela a spazi metrici separabili mappa insiemi σ-scattered in insiemi σ-scattered, concludiamo quindi che $\mathcal{S}$ non è σ-scattered.

Il fatto che allora $\mathscr{C}(K)$ non ammetta un rinormamento Kadets segue da [Han01, Theorem 1.5]. $\square$

Riferimenti bibliografici

[BP03] D. K. Burke and R. Pol. On non-measurability of ℓ_∞/c_0 in its second dual. *Proceedings of the american mathematical society*, 131(12):3955–3959, 2003.

[Chr71] J. P. R. Christensen. Borel structures and topological zero-one law. *Math. Scand.*, 29:245–255, 1971.

[DGZ93] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler. *Smoothness and renormings in Banach spaces*, volume 64 of *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics*. Longman scientific & technical, Burnt Mill, 1993.

[Dug66] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, inc., Boston, 1966.

[Edg77] G. A. Edgar. Measurability in a Banach space. *Indiana University Mathetatics Journal*, 26(4):663–677, 1977.

[Edg79] G. A. Edgar. Measurability in a Banach space, II. *Indiana University Mathetatics Journal*, 28(4):559–579, 1979.

[Edg80] G. A. Edgar. A long James space. In D. Kolzow, editor, *Measure Theory Oberwolfach 1979*, volume 794 of *Lecture notes in mathematics*, pages 31–37, Berlin, 1980. Proceedings of the Conference Held at Oberwolfach, Germany, July 1–7,1979, Springer.

[Fre84] D. H. Fremlin. *Consequences of Martin's axiom*, volume 84 of *Cambridge tracts in Math.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[Fre03] D. H. Fremlin. *Measure theory, Volume 4 Part II.* Digital Books Logistics, Peterborough, 2003.

[Fro62] Z. Frolík. A contribution to the descriptive theory of sets and spaces. In J. Novák, editor, *General topology and its relations to modern analysis and algebra*, pages 157–173, New York, 1962. Proc. Symp. Prague 1961, Publishing house of ČSAV and Academic press.

[Hal50] P. R. Halmos. *Measure theory.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1950.

[Han01] R. W. Hansell. Descriptive sets and the topology of nonseparable Banach spaces. *Serdica Math. J.*, 27(1):1–66, 2001.

[Lin72] J. Lindenstrauss. Weakly compact sets—their properties and the spaces they genearate. In R. D. Anderson, editor, *Symposium on Infinite-Dimensional Topology*, volume 69, pages 235–273, Princeton, 1972. Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press.

[MP09] W. Marciszewski and R. Pol. On Banach spaces whose norm-open sets are $\mathcal{F}_\sigma$ in the weak topology. *J. Math. Anal. Appl.*, 350:708–722, 2009.

[Onc00] L. Oncina. The JNR property and the Borel structure of a Banach space. *Serdica Math. J.*, 26:13–32, 2000.

[Raj99] M. Raja. Kadec norms and Borel sets in Banach spaces. *Studia Mathematica*, 136(1):1–16, 1999.

[Tal75] M. Talagrand. Sur un conjecture de H. H. Corson. *Bull. Sci. Math.*, 99(2):211–212, 1975.

[Tal78] M. Talagrand. Comparaison des boreliens d'un espace de Banach pour les topologies forte et faibles. *Indiana University Mathetatics Journal*, 27(6):1001–1004, 1978.

[Tod05] S. Todorčević. Representing trees as relatively compatc subsets of the first Baire class. *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.*, 30:29–45, 2005.

[Vaš81] L. Vašák. On one generalization of weakly compactly generated Banach spaces. *Studia Math.*, 70(1):11–19, 1981.