INSIEMI INVARIANTI PER COMBINAZIONI CONVESSE INFINITE

LIBOR VESELY

Il presente testo è una traccia di due seminari SAA sull'argomento (15 febbraio e 8 marzo 2012). Le referenze base sono [6, §22] e [5].

1. Definizioni e risultati base

In quanto segue, a meno che non sia specificato altrimenti, X è uno spazio normato reale e C è un sottoinsieme non vuoto di X.

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned}\Lambda &:= S^+_{\ell_1} = \{\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ \lambda_n \geq 0\ \forall n,\ \textstyle\sum_i \lambda_i = 1\}\,,\\ \Lambda_0 &:= \{\lambda \in \Lambda :\ \lambda \text{ ha supporto finito}\}\,.\end{aligned}$$

Ovviamente, C è convesso se e solo se vale l'implicazione

$$\lambda \in \Lambda_0,\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C \ \Rightarrow\ \textstyle\sum_n \lambda_n x_n \in C\,.$$

Definition 1.1. L'insieme C viene detto:

(a) *CS-chiuso* se soddisfa l'implicazione

$$\lambda \in \Lambda,\ \{x_n\} \subset C,\ \textstyle\sum_n \lambda_n x_n = x \in X \ \Rightarrow\ x \in C\,;$$

(b) *CS-compatto* se soddisfa l'implicazione

$$\lambda \in \Lambda,\ \{x_n\} \subset C \ \Rightarrow\ \textstyle\sum_n \lambda_n x_n = x \in C\,.$$

(Le lettere CS vengono da "convex series".) La differenza tra le due nozioni consiste nel fatto che la convergenza della "serie convessa" viene supposta in (a) e richista in (b).

Ovviamente, se C è CS-compatto allora è anche CS-chiuso. Vedremo tra poco che l'altra implicazione non vale (infatti, la CS-compattezza implica la limitatezza). Inoltre, se C è CS-chiuso, è convesso.

Observation 1.2. *Sia C l'intersezione di una famiglia di insiemi C_α ($\alpha \in A$).*

(a) *Se ogni C_α è CS-chiuso, allora anche C è CS-chiuso.*

(b) *Se ogni C_α è CS-chiuso e almeno uno di loro è CS-compatto, allora C è CS-compatto.*

Lemma 1.3.

(a) *Ogni insieme convesso chiuso è CS-chiuso, ma non vale il vice versa (anche gli aperti convessi sono CS-chiusi, come vedremo).*
(b) *Un sottospazio è CS-chiuso se e solo se è chiuso.*

Lemma 1.4. *Ogni insieme CS-compatto è CS-chiuso e limitato. Il vice versa vale in tutti e soli gli spazi di Banach.*

Observation 1.5. *Siano X, Y spazi normati e $T\colon X \to Y$ un operatore affine (ad es., lineare) continuo.*

(a) *Se $C \subset X$ è CS-compatto, allora anche $T(C)$ lo è.*
(b) *Se $D \subset Y$ è CS-chiuso, allora anche $T^{-1}(D)$ lo è.*

Lemma 1.6. *Siano $A, B, C, D \subset X$ tali che $A = \operatorname{conv}(C \cup D)$ e $B = C + D$.*

(a) *Se C è CS-compatto e D è CS-chiuso, allora A, B sono CS-chiusi.*
(b) *Se C, D sono CS-compatti, allora A, B sono CS-compatti.*

2. Lemma di Sottrazione

Theorem 2.1 (Lemma di Sottrazione)**.** *Sia X uno spazio normato. Siano $C \subset X$ un insieme CS-chiuso, $B \subset X$ un insieme limitato, $\alpha \in (0, 1)$. Se*

$$B \subset C + \alpha B$$

allora

$$(1 - \alpha)B \subset C\,.$$

Proof. Fissato $b_0 \in B$, si trovano induttivamente $c_k \in C$ $(k \geq 0)$ e $b_k \in B$ $(k \geq 1)$ tali che $b_k = c_k + \alpha b_{k+1}$ $(k \geq 0)$. Moltiplicando la k-esima uguaglianza per α^k e sommando quelle con $0 \leq k \leq n$, si deduce che $b_0 = \sum_0^n \alpha^k c_k + \alpha^{n+1} b_{n+1}$. Passando al limite per $n \to +\infty$, si ottiene $b_0 = \sum_0^\infty \alpha^k c_k$, da cui $(1-\alpha)b_0 = \sum_0^\infty (1-\alpha)\alpha^k c_k \in C$ (serie convessa!). □

Ricordiamo che l'*interno algebrico* (o *core*) di un insieme C è l'insieme

$$\text{a-int}(C) = \{x \in C :\ \forall v \in X\ \exists t_v > 0 :\ x + [0, t_v]v \subset C\}\,,$$

cioè, l'insieme dei punti di C dai quali ci si può muovere in ogni direzione per almeno un po' senza uscire di C.

Corollary 2.2. *Sia C un insieme CS-chiuso in X.*

(a) *C contiene punti interni o è mai denso.*
(b) $\operatorname{int}(C) = \operatorname{int}(\overline{C})$.
(c) *Se X è di Banach, allora* $\operatorname{int}(C) = \operatorname{int}(\overline{C}) = \text{a-int}(C) = \text{a-int}(\overline{C})$.

Proof. (b) L'inclusione $\subset$ è ovvia. Per dimostrare l'altra inclusione, supponiamo che $0 \in \mathrm{int}(\overline{C})$. Esiste $\delta > 0$ tale che, per $B := \delta B_X$, abbiamo $B \subset \overline{C} \subset C + \frac{1}{2}B$. Per il Teorema 2.1, $\frac{1}{2}B \subset C$; quindi $0 \in \mathrm{int}(C)$.
(a) segue da (b).
(c) Per un facile corollario del Teorema di Baire, se l'interno algebrico e quello topologico coincidono per insiemi convessi chiusi in spazi di Banach. Quindi, nel nostro caso, $\mathrm{int}(C) \subset \text{a-int}(C) \subset \text{a-int}(\overline{C}) = \mathrm{int}(\overline{C}) = \mathrm{int}(C)$. □

Corollary 2.3 (Teorema della Mappa Aperta). *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio normato, $T\colon X \to Y$ un operatore continuo lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *$T(X)$ è di II categoria di Baire in Y;*
(ii) *$T(X) = Y$ e Y è uno spazio di Banach;*
(iii) *T è una mappa aperta (cioè, manda aperti in aperti);*
(iv) *$T(B_X)$ è un intorno di* 0.

Proof. L'equivalenza $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ è facile.
$(i) \Rightarrow (iv)$ *[questa è l'implicazione principale del teorema!].* Siccome B_X è CS-compatto (Lemma 1.4), anche $T(B_X)$ lo è (Teorema 1.5). Inoltre, $T(X) = \bigcup_n nT(B_X)$ implica che $T(B_X)$ non può essere mai denso. Per Corollario 2.2, $T(B_X)$ ha punti interni. Per simmetria, $0 \in \mathrm{int}(T(B_X))$.
$(iv) \Rightarrow (ii)$. La suriettività di T è immediata: $T(X) = \bigcup_n nT(B_X) = Y$. Inoltre, T può essere scritto come la composizione $T = T_0 \circ q$ dove $q\colon X \to X/\mathrm{Ker}T$ è la mappa quoziente e $T_0\colon X/\mathrm{Ker}T \to Y$ è lineare, continuo, iniettivo e suriettivo. Dal fatto che T è una mappa aperta segue facilmente che T_0 è un isomorfismo tra lo spazio di Banach $X/\mathrm{Ker}T$ e Y. Quindi anche Y è di Banach.
$(ii) \Rightarrow (i)$ segue dal Teorema di Baire. □

3. Su insiemi idealmente convessi (ovvero come "migliorare" combinazioni convesse)

Nel 1970, E.A. Lifshits ha introdotto la seguente nozione di insieme "idealmente convesso", che è una variante della definizione di insieme CS-chiuso. L'unica differenza sta nel fatto che vengono considerate soltanto successioni *limitate* di punti dell'insieme.

Definition 3.1. Diciamo che l'insieme C è *idealmente convesso* se soddisfa l'implicazione:

$$\lambda \in \Lambda,\ \{x_n\} \subset C \text{ limitata},\ \textstyle\sum_n \lambda_n x_n = x \in X \ \Rightarrow\ x \in C\,.$$

Ovviamente, ogni CS-chiuso è anche idealmente convesso. Ma vale il vice versa? In altre parole, se un punto è una combinazione convessa infinita di una successione in un insieme convesso C, è possibile scriverlo come una combinazione convessa infinita di una successione limitata in C? Il seguente lemma ci dà una risposta affermativa.

Lemma 3.2. *Sia $C \subset X$ convesso. Siano $\lambda, t \in \Lambda$ dove t ha supporto infinito, e $\{x_i\} \subset C$. Se $\sum_i \lambda_i x_i = x \in X$ e $\varepsilon > 0$, allora esiste una successione $\{z_k\} \subset C \cap B(x, \varepsilon)$ tale che $x = \sum_k t_k z_k$.*
(Notazione: $B(x, \varepsilon) = x + \varepsilon B_X$.)

Corollary 3.3. *Sia $C \subset X$.*
(a) *C è idealmente convesso se e solo se C è CS-chiuso.*
(b) *Se C è convesso e "t-CS-chiuso" per qualche $t \in \Lambda$ a supporto infinito, allora C è CS-chiuso.*

4. Condizioni sufficienti per la CS-chiusura

Observation 4.1. *Gli intervalli* $[0, +\infty)$ *e* $(0, +\infty)$ *sono CS-chiusi. Ne segue facilmente che* ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è CS-chiuso.

Definition 4.2. $C \subset X$ viene detto *e-convesso* ("evenly convex") se può essere scritto come l'intersezione di una famiglia di semispazi aperti.

Proposition 4.3. *Sia $C \subset X$ convesso. Allora valgono le seguenti implicazioni e nessuna di esse è un'equivalenza:*

$$C \text{ è aperto o chiuso} \quad \Rightarrow \quad C \text{ è e-convesso} \quad \Rightarrow \quad C \text{ è CS-chiuso.}$$

Proof. I convessi aperti o chiusi sono e-convessi per il teorema di Hahn-Banach. Un cerchio aperto (in $\mathbb{R}^2$) a cui è stato aggiunto un punto del bordo è e-convesso, ma non è aperto né chiuso.
Sia $C = \bigcap_\alpha H_\alpha$ dove gli H_α sono semispazi aperti. Essi sono della forma $H_\alpha = f^{-1}((-\infty, b_\alpha))$ con $f_\alpha \in X^* \setminus \{0\}$ e $b_\alpha \in \mathbb{R}$. Da Observation 4.1 e Observation 1.5(b) segue che ogni H_α è CS-chiuso, e quindi lo è anche C (Observation 1.2). Per vedere che non vale il vice versa, consideriamo l'insieme $C \subset \mathbb{R}^2$, ottenuto come l'involucro convesso dei due cerchi chiusi $B(-e_1, 1)$ e $B(e_1, 1)$ (dove $e_1 = (1, 0)$) da cui è stato tolto il punto $(1, 1)$. Allora C è CS-chiuso (Proposition 4.4) ma non è e-convesso. □

La seguente proposizione è stata dimostrata indipendentemente in diversi articoli; ne conosco i seguenti (in ordine cronologico): [1], [8], [2],[4], [10], [9].

Proposition 4.4. *Ogni insieme convesso finito-dimensionale è CS-chiuso.*
(Si dimostra per induzione rispetto alla dimensione dell'insieme.)

Chiaramente, ogni insieme che può essere espresso come intersezione di aperti convessi è CS-chiuso. E', però, noto che un insieme convesso G_δ può non essere intersezione di aperti *convessi.* E' quindi significativo il seguente teorema.

Theorem 4.5 (Fremlin–Talagrand)**.** *Ogni insieme convesso G_δ in uno spazio di Banach è CS-chiuso.*

Theorem 4.6 (Fremlin–Talagrand)**.** *Siano X uno spazio normato e C un insieme convesso in X. Se C è completamente metrizzabile, allora C è CS-chiuso.*

5. Unioni crescenti di insiemi CS-chiusi

Aggiungo alcune proprietà di unioni monotone di successioni di insiemi CS-chiusi. Tali proprietà sono state implicitamente utilizzate, ad esempio, in alcune dimostrazioni riguardanti i subdifferenziali di funzioni convesse inferiormente semicontinue. Il motivo: se $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ è una funzione convessa semicontinua inferiormente, allora il suo dominio

$$\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq n\}$$

è unione crescente di insiemi convessi chiusi e quindi CS-chiusi.

Useremo la seguente *notazione*:

$C_n \nearrow C$ significa che $C_n \subset C_{n+1}$ per ogni n, e $\bigcup_k C_k = C$.

Theorem 5.1. *Sia $\{C_n\}$ una successione di insiemi CS-chiusi in uno spazio di Banach X, tale che $C_n \nearrow C$. Supponiamo che l'insieme*

$$E := \bigcup_{t>0} tC$$

sia di II categoria di Baire in X.

(a) *Se $0 \in E$ (cioè, $0 \in C$), allora* $\operatorname{int}(C_{n_0}) \neq \emptyset$ *per qualche n_0.*
(b) *Se $0 \in \operatorname{int}(\overline{E}\,)$, allora $0 \in \operatorname{int}(C_{n_0})$ per qualche n_0.*

Corollary 5.2. *Siano X uno spazio di Banach e $C \subset X$ un'unione crescente di insiemi CS-chiusi.*

(a) $\text{a-int}(C) = \operatorname{int}(C)$.
(b) *Se, inoltre, C è di II categoria di Baire in X, allora* $\operatorname{int}(\overline{C}\,) = \operatorname{int}(C)$.

Il seguente corollario può essere utilizzato nella dimostrazione del teorema che dice che $\partial(f+g) = \partial f + \partial g$ se f, g sono due funzioni convesse, proprie e inferiormente semicontinue, tali che $E := \bigcup_{t>0}[\operatorname{dom}(f) - \operatorname{dom}(g)]$ sia un sottospazio chiuso di X.

Corollary 5.3. *Siano $\{C_n\}$ e $\{D_n\}$ due successioni di insiemi CS-chiusi in uno spazio di Banach X, tali che $C_n \nearrow C$ e $D_n \nearrow D$. Supponiamo che $Y \subset X$ sia un sottospazio chiuso e che l'insieme $E := \bigcup_{t>0} t(C - D + Y)$ sia di II categoria in X.*

(a) *Se $0 \in E$, allora* $\operatorname{int}(C_{n_0} - D_{n_0} + Y) \neq \emptyset$ *per qualche n_0.*

(b) *Se* $0 \in \operatorname{int}(\overline{E}\,)$, *allora* $0 \in \operatorname{int}(C_{n_0} - D_{n_0} + Y)$ *per qualche* n_0.

References

[1] D. Blackwell and M.A. Girshick, *Theory of games and statistical decisions*, John Wiley and Sons, New York; Chapman and Hall, London, 1954.

[2] W.D. Cook and R.J. Webster, *Carathéodory's theorem*, Canad. Math. Bull. **15** (1972), 293.

[3] D.H. Fremlin and M. Talagrand, *On CS-closed sets*, Mathematika **26** (1979), 30–32.

[4] R.B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications*, Graduate Texts in Mathematics, No. 24, Springer-Verlag, New York – Heidelberg, 1975.

[5] G.J.O. Jameson, *Convex series*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 72 (1972), 3747.

[6] G.J.O. Jameson, *Topology and Normed Spaces*, Chapman and Hall, London, 1974.

[7] E.A. Lifshits, *Ideally convex sets*, Funct. Anal. Appl. **4** (1970), 330–331 (translation from Russian).

[8] H. Rubin and O. Wesler, *A note on convexity in Euclidean n-space*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 522–523.

[9] H. Takemoto, A. Uchiyama and L. Zsido, *The σ-convexity of all bounded convex sets in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}^n$*, Nihonkai Math. J. **14** (2003), 61–64.

[10] S.H. Tijs and J.M. Borwein, *Some generalizations of Carathodory's theorem via barycentres, with application to mathematical programming*, Canad. Math. Bull. **23** (1980), 339–346.

E-mail address: `libor.vesely@unimi.it`