INSIEMI CONVESSI DISGIUNTI CHE NON POSSONO ESSERE SEPARATI CON UN IPERPIANO

(L. Vesely, SAA del 13/05/2010)

Breve sunto. Verrà presentata una dimostrazione del seguente risultato di V. Klee: ogni spazio di Banach separabile non riflessivo contiene una coppia di insiemi disgiunti, entrambi convessi, chiusi e limitati, che non possono essere separati con un iperpiano chiuso. (È invece ben noto che in uno spazio riflessivo tale coppia non può esistere.)

Prima di iniziare, fissiamo la terminologia e la relativa notazione. Tutti gli spazi trattati sono spazi reali.

Definizione 0.1. Siano X uno spazio vettoriale topologico (s.v.t.) e $A, B \subset X$ due insiemi non vuoti. Diciamo che:

- A e B possono essere *debolmente separati* (notazione: $(A, B) \in \mathcal{WS}$) se esiste $f \in X^* \setminus \{0\}$ tale che $\sup f(A) \leq \inf f(B)$;
- A e B possono essere *separati* (notazione: $(A, B) \in \mathcal{S}$) se esiste $f \in X^*$ tale che $\sup f(A) \leq \inf f(B)$ e $f|_{A \cup B}$ non sia costante;
- A e B possono essere *fortemente separati* (notazione: $(A, B) \in \mathcal{SS}$) se esiste $f \in X^*$ tale che $\sup f(A) < \inf f(B)$.

Commento 0.2.

- Le relazioni $\mathcal{WS}, \mathcal{S}, \mathcal{SS}$ sono simmetriche.
- La relazione $\mathcal{WS}$ è molto debole: addirittura, ogni insieme contenuto in un iperpiano chiuso può essere debolmente separato da se stesso.
- Se $(A, B) \in \mathcal{WS}$ e f è il corrispondente funzionale, allora per $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\sup f(A) \leq \alpha \leq \inf f(B)$ gli insiemi A, B giacciono in semispazi chiusi opposti determinati dall'iperpiano $f^{-1}(\alpha)$. Se, in più, $(A, B) \in \mathcal{S}$, allora A, B non sono entrambi contenuti nell'iperpiano. Se, in più ancora, $(A, B) \in \mathcal{SS}$, vi è tutto un fascio di iperpiani paralleli che separa A, B.

Elenchiamo nel prossimo teorema alcuni risultati noti sulla possibilità di separare due insiemi convessi. Ricordiamo che $\mathrm{ri}(A)$, l'*interno relativo* di A, è definito come l'interno di A nel suo involucro affine:

$$\mathrm{ri}(A) = \mathrm{int}_{\mathrm{aff}(A)}(A)\,.$$

È ben noto che un insieme convesso finito-dimensionale ha sempre interno relativo non vuoto.

Teorema 0.3 (Teoremi di separazione)**.** *Siano X uno s.v.t. e $A, B \subset X$ due insiemi convessi non vuoti.*

(a) $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$, $B \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset \;\Rightarrow\; (A, B) \in \mathcal{S}$ (teorema di Hahn-Banach).
(b) *X localmente convesso, A compatto, B chiuso,* $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; (A, B) \in \mathcal{SS}$ (segue da (a): A può essere "gonfiato").
(c) *X normato,* $\mathrm{dist}(A, B) > 0 \;\Rightarrow\; (A, B) \in \mathcal{SS}$ (analogo a (b)).
(d) *X Banach riflessivo, A, B chiusi, A limitato,* $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; (A, B) \in \mathcal{SS}$ (segue da (b) usando la topologia debole).

(e) $X = \mathbb{R}^d$, $\mathrm{ri}(A) \cap \mathrm{ri}(B) = \emptyset \;\Rightarrow\; (A,B) \in \mathcal{S}$ (la dimostrazione usa (a), ma non direttamente).

Sorge naturale la seguente domanda: *in uno spazio di Banach non riflessivo esistono sempre due insiemi disgiunti, entrambi convessi chiusi limitati, tali che $(A,B) \notin \mathcal{WS}$ (o almeno $(A,B) \notin \mathcal{S}$)?*

Tale domanda è stata (almeno parzialmente) risolta da V. Klee [1] nel 1959. Il seguente teorema contiene il "succo" della costruzione di Klee.

T1 **Teorema 0.4.** *Siano X uno spazio di Banach, $Y \subset X$ un sottospazio chiuso non riflessivo, $A \subset X$ un insieme convesso, chiuso, limitato e simmetrico, $C = A \cap Y$. Supponiamo che A sia totale (cioè, $A^\perp = \{0\}$), $\mathrm{int}(A) = \emptyset$, $\mathrm{int}_Y(C) \neq \emptyset$. Allora X contiene un sottoinsieme (non vuoto) convesso, chiuso e limitato B tale che $A \cap B = \emptyset$ e $(A,B) \notin \mathcal{WS}$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Baire, 0 non appartiene all'interno algebrico di A, per cui esiste un vettore $v \in X \setminus \{0\}$ tale che $(0,+\infty)v \cap A = \emptyset$. Vale addirittura

uno (1)
$$\big[(0,+\infty)v + C\big] \cap A = \emptyset\,.$$

(Se non fosse vero, esisterebbero $t > 0$, $c \in C$ e $a \in A$ con $tv + c = a$, ma in tal caso si avrebbe $\frac{t}{2}v = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(-c) \in A$, una contraddizione con la scelta di v.)
Siccome Y non è riflessivo, esiste una successione $\{C_n\}$ di insiemi non vuoti, convessi, chiusi e limitati, tale che

$$\tfrac{1}{2}C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \quad \text{e} \quad \textstyle\bigcap_n C_n \neq \emptyset\,.$$

(L'esistenza di tale successione segue, ad esempio, dal famoso teorema di James [anche se è stata dimostrata prima del teorema di James]: $\frac{1}{2}C$ è la bolla unitaria di una norma equivalente sullo spazio non riflessivo Y; esiste quindi $g \in Y^*$ che non assume il suo estremo superiore su $\frac{1}{2}C$; gli insiemi $C_n = \{x \in \frac{1}{2}C : g(x) \geq \frac{n}{n+1}\sup g(\frac{1}{2}C)\}$ hanno la proprietà richiesta.)

Definiamo

$$B = \overline{\mathrm{conv}}\left[\,\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(\tfrac{1}{n}v + C_n\big)\right].$$

Affermiamo che A e B sono disgiunti. Grazie a (1), ciò sarà dimostrato se dimostriamo che $B \subset (0,+\infty)v + C$.
Sia b un qualsiasi elemento di B. Allora $b = \lim_k x_k$ dove, per ogni k,

$$x_k = \sum_i \lambda_i^{(k)}\big(\tfrac{1}{i}v + c_i^{(k)}\big)$$

con $\{\lambda_i^{(k)}\}_i \subset [0,+\infty)$ avente solo un numero finito di termini non nulli, $\sum_i \lambda_i^{(k)} = 1$, $c_i^{(k)} \in C_i$. Possiamo scrivere

$$x_k = \sigma_k v + d_k \qquad \text{dove} \quad \sigma_k = \textstyle\sum_i \lambda_i^{(k)}\frac{1}{i} \;\in [0,1]\,, \quad d_k = \sum_i \lambda_i^{(k)} c_i^{(k)} \in \frac{1}{2}C\,.$$

Passando ad una sottosuccessione, possiamo supporre che $\sigma_k \to \sigma_0 \in [0,1]$. Di conseguenza $d_k \to d_0 \in \frac{1}{2}C$ e $b = \sigma_0 v + d_0$. Se $\sigma_0 > 0$, allora $b \in (0,+\infty)v + C$ come si voleva dimostrare.

Ora, supponiamo che $\sigma_0 = 0$. Ciò implica che, per ogni i, $\lim_k \lambda_i^{(k)} = 0$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$d_k = \sum_{i \le m} \lambda_i^{(k)} c_i^{(k)} + \sum_{i > m} \lambda_i^{(k)} c_i^{(k)} .$$

Per $k \to +\infty$, la prima somma tende a zero. Di conseguenza, siccome $\mu_k := \sum_{i \le m} \lambda_i^{(k)} \to 0$, abbiamo

$$b = \lim_k d_k = \lim_k \tfrac{1}{1-\mu_k} \sum_{i>m} \lambda_i^{(k)} c_i^{(k)} \in C_{m+1}$$

(perché l'argomento dell'ultimo limite è una combinazione convessa). Ma ciò significa che $b \in \bigcap_m C_m$, che è in contraddizione con la scelta di $\{C_m\}$.

Rimane da dimostrare che A, B non possono essere debolmente separati. Supponiamo che $f \in X^*$ sia tale che $\sup f(A) \le \inf f(B)$. Ovviamente

due
$$\sup f(\tfrac{1}{2}C) \le \sup f(C) \le \sup f(A) \le \inf f(B) . \tag{2}$$

Per $n \in \mathbb{N}$ e $c_n \in C_n$ abbiamo $\frac{1}{n}v = (\frac{1}{n}v + c_n) - c_n \in B - \frac{1}{2}C$, e quindi $\operatorname{dist}(B, \frac{1}{2}C) = 0$. Di conseguenza, $\sup f(\frac{1}{2}C) = \inf f(B)$ e tutte le disuguaglianze in (2) sono uguaglianze. Ne segue facilmente che $\sup f(C) = 0 = \sup f(A)$. Per la simmetria di A, $f|_A \equiv 0$ e quindi (siccome A è totale) $f = 0$. La dimostrazione è completa. $\square$

Il resto del ragionamento di Klee è contenuto nel seguente teorema che afferma che ogni spazio separabile non riflessivo contiene Y e A come nel Teorema 0.4. A differenza di Klee, noi possiamo usare con vantaggio il seguente ben noto risultato di A. Pelczynski del 1962. (Ricordiamo che una successione $\{u_n\}$ è detta *basica* se essa è una base di Schauder per lo spazio $\overline{\operatorname{span}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.)

P **Teorema 0.5** ([2])**.** *Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se ogni successione basica limitata in X converge debolmente a zero.*

CP **Corollario 0.6.** *Ogni spazio di Banach non riflessivo contiene un sottospazio non riflessivo di codimensione infinita.*

Dimostrazione. Se X non è riflessivo, contiene una successione basica $\{u_n\}$ che non converge debolmente a zero. Almeno una delle due sottosuccessioni $\{u_{2k}\}$ e $\{u_{2k-1}\}$ non converge debolmente a 0. L'involucro lineare chiuso di tale successione è il sottospazio cercato. $\square$

T2 **Teorema 0.7.** *Sia X uno spazio di Banach separabile non riflessivo. Allora X contiene un sottospazio chiuso Y e un sottoinsieme A che soddisfino le ipotesi del Teorema 0.4.*

Dimostrazione. Per il Corollario 0.6, X contiene un sottospazio non riflessivo Y di codimensione infinita. Sia $\{x_j\}$ una successione densa in S_X $(= \{x : \|x\| = 1\})$. Definiamo

$$K = \overline{\operatorname{conv}}\{\pm\tfrac{1}{j}\, x_j : j \in \mathbb{N}\} , \quad A = \operatorname{conv}[B_Y \cup K] .$$

Allora K è compatto (essendo l'involucro convesso chiuso dell'insieme compatto $\{0\} \cup \{\pm\frac{1}{j}\, x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$), e quindi A è chiuso, oltre ad essere convesso, limitato, simmetrico e totale con $\operatorname{int}_Y(A \cap Y) \supset \operatorname{int}_Y(B_Y) \ne \emptyset$. Rimane da dimostrare che A non ha punti interni. Se ne avesse, avrebbe punti interni anche la sua immagine tramite la mappa quoziente $Q_Y : X \to X/Y$, cioè l'insieme $Q_Y(A) = \mathrm{conv}[Q_Y(B_Y) \cup Q_Y(K)] = Q_Y(K)$ che è compatto. Ciò non è possibile in quanto X/Y ha dimensione infinita. $\square$

Corollario 0.8. *Sia X uno spazio di Banach non riflessivo.*

(a) *Se X è separabile, esso contiene due insiemi disgiunti, entrambi non vuoti, convessi, chiusi e limitati, tali che $(A, B) \notin \mathcal{WS}$.*

(b) *In generale, X contiene due insiemi disgiunti, entrambi non vuoti, convessi, chiusi e limitati, tali che $(A, B) \notin \mathcal{S}$.* (Infatti, basta costriuirli in un sottospazio separabile non riflessivo di X, usando il punto precedente.)

Durante il seminario sono sorti i seguenti **due problemi aperti**.

Problema 0.9 (L. Vesely)**.** È vero che in ogni spazio di Banach non riflessivo X esistono un sottospazio chiuso Y e un sottoinsieme A che soddisfino le ipotesi del Teorema 0.4 ?

Problema 0.10 (L. Caspani)**.** È vero che in ogni spazio di Banach non riflessivo separabile X esistono un insieme non vuoto, convesso, chiuso e limitato C, un vettore $v \in X \setminus \{0\}$ e un intervallo aperto non vuoto $I \subset (0, +\infty)$ tali che

$$C \cap (C + tv) = \emptyset \quad \text{e} \quad (C, C + tv) \notin \mathcal{WS} \qquad \text{per ogni } t \in I\,?$$

References

klee [1] V.L. Klee, *Convex sets in linear spaces, II*, Duke Math. J. **18** (1951), 875–883.

pelczy [2] A. Pelczyński, *A note on the paper of A. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces"*, Studia Math. **21** (1962), 371–374.