//

K e $\mathcal{C}(K)$

(Stefania D'Alessandro)

Tratto da:
Habala, Hájek, Zizler
"Introduction to Banach Spaces I & II"
(testo ed eserciziario)

1. INTRODUZIONE

- (K, τ) spazio topologico compatto di Hausdorff
- $\mathcal{C}(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} , f \text{ continua} \}$

  $\forall f \in \mathcal{C}(K) \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$
- $T : K \longrightarrow (B_{\mathcal{C}^*(K)}, w^*)$

  $k \longmapsto \delta_k$

  è un omeomorfismo tra (K, τ) e $(T(K), w^*)$ (1)
- $\text{ext } B_{\mathcal{C}^*(K)} "=" \pm K$

Teorema 1

$\mathcal{C}(K)$ è separabile $\Longleftrightarrow$ K è metrizzabile

Dimostrazione:

$(\Longrightarrow)$ $\mathcal{C}(K)$ separabile $\Rightarrow$ $(B_{\mathcal{C}^*(K)}, w^*)$ metrizzabile

$\Rightarrow$ $(T(K), w^*)$ metrizzabile $\Rightarrow$ K metrizzabile.

$(\Longleftarrow)$ K compatto metrico $\Rightarrow$ K separabile, sia $\{x_n\}$ densa in K.

Per $x \in K$ si definiscano

$$f_{n,m}(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} - d(x, x_n) & \text{se } d(x, x_n) \leq \frac{1}{m} \\ 0 & \text{se } d(x, x_n) > \frac{1}{m} \end{cases}$$

$\mathcal{A} = \text{span}(\{f_{n,m}\} \cup \{1\})$ genera un'algebra separabile, che contiene le costanti e che separa i punti di K

$\xrightarrow[\text{Weierstraß}]{\text{Stone}}$ $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|} = \mathcal{C}(K) \Rightarrow \mathcal{C}(K)$ separabile.

$\square$

Teorema 2 (Banach - Stone)

$\mathcal{C}(K)$ è isometrico a $\mathcal{C}(L)$ $\Longleftrightarrow$ K è omeomorfo a L.

Dimostrazione:

($\Longleftarrow$) Sia $\varphi: K \to L$ omeomorfismo.

Si definisca $T: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$

$$f \longmapsto Tf$$

tale che $Tf(\ell) = f(\varphi^{-1}(\ell))$.

ALSPACH, AMIR, BENYAMINI: basterebbe meno di "isometria"

T è una isometria (per la suriettività: $T(\underbrace{g\circ\varphi}_{\in \mathcal{C}(K)}) = g$ $\forall g \in \mathcal{C}(L)$).

($\Longrightarrow$) Sia $T: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ isometria.

Allora $T^*: \mathcal{C}^*(L) \to \mathcal{C}^*(K)$ è isometria

(ed essendo un op. duale è caratterizzato dalla w^*-w^*-continuità).

Inoltre $T(\text{ext } B_{\mathcal{C}^*(L)}) = \text{ext } B_{\mathcal{C}^*(K)}$, dunque

$$T^*(\delta_\ell) = \varepsilon(\ell)\, \delta_{k_\ell} \quad \text{con } k_\ell \in K \text{ e } \varepsilon(\ell) = \pm 1.$$

Abuso di notazione $T^*(\ell) = \varepsilon(\ell) k_\ell$ (v. (1)).

T w^*-w^*-continua $\Rightarrow$ $\ell \mapsto \varepsilon(\ell) k_\ell$ continua.

Anche $\varepsilon(\ell)$ è continua: per $x \equiv 1 \in \mathcal{C}(K)$ si ha

$$\varepsilon(\ell) = \varepsilon(\ell)\, \delta_{k_\ell}(x) = T^* \delta_\ell(x) = \delta_\ell(Tx) = \underbrace{Tx}_{\in \mathcal{C}(L)}(\ell)$$

funzione continua in ℓ

Dunque $\dfrac{1}{\varepsilon(\ell)}$ è continua e per composizione lo è anche $\rho: L \to K$

$$\ell \mapsto k_\ell$$

Essendo ρ 1-1, suriettiva e continua da L compatto a K T_2 $\Longrightarrow$ ρ omeomorfismo.

$\square$

2. WCG

<u>Definizione</u>: Sia X uno spazio di Banach. X è <u>weakly compactly generated</u> (<u>WCG</u>) se $\exists\ K \subseteq X$ w-compatto tale che $X = \overline{\operatorname{span}}\, K$.

<u>Esempi</u>:

WCG	NON WCG
• X separabile, $K = \{\frac{x_n}{n}\} \cup \{0\}$ • X riflessivo, $K = B_X$ • $c_0(\Gamma)$, $K = \{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \cup \{0\}$ • $L^1(\mu) \iff \mu$ σ-finita (p.e. se μ finita $K = i(B_{L^2(\mu)})$)	• $\ell^\infty(\mathbb{N})$ perché ogni w-compatto è separabile (K w-cpt $\Rightarrow K$ w^*-cpt $\overset{\ell^1}{\underset{sep}{\Rightarrow}}$ K w^*-cpt + metrizzabile $\Rightarrow K$ w^*-sep $\overset{w_{\restriction K} = w^*_{\restriction K}}{\Longrightarrow}$ K w-sep. $\Rightarrow K$ sep.). • $\ell^1(\Gamma)$ con Γ uncountable perché ℓ^1 è di Schur (K w-cpt $\Rightarrow K$ $\lVert\cdot\rVert$-cpt + metrico $\Rightarrow K$ sep.)

<u>Definizione</u>: Sia K uno spazio compatto. K è detto <u>compatto di Eberlein</u> se è omeomorfo ad un w-compatto in $c_0(\Gamma)$, per qualche Γ.

<u>Esempi</u>:

EBERLEIN	NON EBERLEIN
• K metrico compatto $\mathcal{C}(K)$ separabile; $\{x_n\}$ densa in $B_{\mathcal{C}(K)}$ $\mathcal{C}^*(K) \xrightarrow{T} \ell^2 \xrightarrow{i} c_0$ $f \longmapsto \left(\frac{f(x_n)}{n}\right)$ w^*-w-continua w-w-continua K w^*-chiuso in $(B_{\mathcal{C}^*(K)}, w^*)$ $\Rightarrow i\circ T(K)$ w-compatto in c_0 (con $i \circ T_{\restriction K}$ omeomorfismo) • (K, w) compatto in X Banach • (B_{X^*}, w^*) con X WCG	• $[0, \omega_1]$ con ω_1 primo ordinale non-numerabile (2)

<u>strumento</u>: teo di AMIR-LINDENSTRAUSS: costruz. omeo. mediante base di M. w-compatta in X WCG.

Digressione: dimostrazione di (2)

Definizione: Sia K uno spazio compatto. K è detto compatto di Corson se è omeomorfo ad un sottoinsieme di $[0,1]^\Gamma$ con la topologia della convergenza puntuale, formato da elementi a supporto numerabile.

Definizione: Uno spazio topologico T è angelico se $\forall A \subseteq T$ e $\forall x \in \overline{A}$ $\exists (x_n) \subseteq A : x_n \to x$.

Osservazione: K Eberlein $\underset{(i)}{\Longrightarrow}$ K Corson $\underset{(ii)}{\Longrightarrow}$ K angelico

(i) WLOG $K \subseteq (B_{c_0(\Gamma)}, w)$ (Ovviamente si può sostituire $[-1,1]^\Gamma$ nella def. di compatto di Corson).

Sia $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in K$, $x_\gamma \to 0$.

$\forall n$ $\exists$ un numero finito di indici t.c. $|x_\gamma| > \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ supp x è numerabile.

Inoltre, in K (limitato) la topologia debole è la topologia della convergenza per coordinate.

(ii) Sia $K \subseteq [0,1]^\Gamma$ Corson.

$\forall x \in K$, $\{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0\}$ è numerabile.

Siano $H \subseteq K$ e $h \in \overline{H}$; supp $h = \{\mu_i^0\}$.

Scelgo $h_1 \in H$ t.c. $|(h - h_1)(\mu_i^0)| < 1$, supp $h_1 = \{\mu_i^1\}$.

Scelgo $h_2 \in H$ t.c. $|(h - h_2)(\mu_j^i)| < \frac{1}{2}$ $i = 0,1$ $j = 1,2$ ...

$\{h_i\}$ converge ad h in $\bigcup$ supp $h_i = \{y_n\}$ (altrove le h_i e h sono nulle).

K è angelico.

$\therefore$ $[0, \omega_1]$ non angelico $\Longrightarrow$ $[0, \omega_1]$ non Eberlein.

Teorema 3 (Amir - Lindenstrauss)

$\mathcal{C}(K)$ è WCG $\Longleftrightarrow$ K è un compatto di Eberlein

Dimostrazione:

($\Longleftarrow$) WLOG $K \subseteq \frac{1}{2} B_{c_0(\Gamma)}$.

Sia Φ l'insieme delle successioni finite di el. di Γ.

Per $\phi \in \Phi$ e $x \in K$ sia $f_\phi(x) = \prod_{i=1}^{n} x(\gamma_i)$ w-continua su K.

Sia $A = \{ f_\phi : \phi \in \Phi \} \cup \{1\}$.

$\forall x \in K$ e $\varepsilon > 0$ $\exists$ solo finiti elementi distinti di A tali che $|f(x)| > \varepsilon$.

Infatti, se $|f_\phi(x)| > \varepsilon$, allora $|x(\gamma_i)| > \varepsilon$ $\forall \gamma_i \in \phi$ (se $\exists \bar{\gamma}_i : |x(\bar{\gamma}_i)| < \varepsilon \Rightarrow |f_\phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$); se esistessero infinite $f \in A$ distinte tali che $|f(x)| > \varepsilon$, allora $|x(\gamma_i)| > \varepsilon$ per infiniti $\gamma_i \Longrightarrow x \notin c_0$ ↯

Dunque ogni successione di elementi distinti di A converge a 0 puntualmente e dunque debolmente su $\mathcal{C}(K)$ (essendo A limitato).

$A \cup \{0\}$ è w-compatto e span A è un'algebra su $\mathcal{C}(K)$ che contiene le costanti e separa i punti di K $\underset{\text{Weierstraß}}{\overset{\text{Stone}}{\Longrightarrow}}$ $\overline{\operatorname{span} K} = \mathcal{C}(K)$

$\Rightarrow \mathcal{C}(K)$ WCG.

($\Longrightarrow$) $\mathcal{C}(K)$ WCG $\Longrightarrow$ (B_{X^*}, w^*) compatto di Eberlein.

Amir-Lindenstrauss
(con basi di Markuševič)

$K \subseteq (B_{X^*}, w^*)$ w^*-chiuso e quindi w^*-compatto $\Rightarrow$ K compatto di Eberlein.

$\square$

Esempio: $\mathcal{C}([0, \omega_1])$ non è WCG.

Più in generale se K è uno spazio topologico non angelico, $\mathcal{C}(K)$ non è WCG.

3. ASPLUND

Definizione: Sia X di Banach. X è uno spazio di Asplund se $\forall A \subseteq X$ aperto convesso non-vuoto, $\forall f: A \to \mathbb{R}$ convessa continua, si ha $\underbrace{N_F(f)}_{\text{insieme dei punti di NON Fréchet-differenziabilità}}$ è di I categoria di Baire.

"Definizione": X Banach è uno spazio di Asplund se ogni sottospazio separabile ha duale separabile.

Definizione: Uno spazio compatto K è detto scattered se ogni sottoinsieme chiuso $L \subseteq K$ ha un punto isolato in L.

Definizione: Sia K compatto. La derivata di Cantor si definisce come:

$$K^{(0)} := K$$

$$K^{(1)} := K'$$

α ordinale e $K^{(\beta)}$ def $\forall \beta < \alpha$:

$$K^{(\alpha)} = (K^{(\beta)})' \text{ se } \alpha \text{ è un successore}$$

$$K^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} K^{(\beta)} \text{ se } \alpha \text{ è un ordinale limite.}$$

Osservazioni:
- K scattered $\iff K^{(\gamma)} = \emptyset$ per qualche γ (e il primo ordinale per cui si ha "$\emptyset$" non può essere un ordinale limite per compattezza)
- L'immagine continua di un compatto scattered è scattered.

Lemma: Uno spazio compatto K è numerabile $\iff$ K è metrizzabile e scattered. (3)

Lemma (Rudin) Sia K un compatto scattered. Allora $\mathcal{C}^*(K)$ è isometrico a $\ell^1(\Gamma)$

Teorema 4

$\mathcal{C}(K)$ è di Asplund $\iff$ K scattered.

Dimostrazione.

($\Leftarrow$) Siano K scattered e $X \subseteq \mathcal{C}(K)$ separabile, con $\{g_n\}$ densa in B_X.

Sia $G: K \to [-1,1]^{\mathbb{N}}$

$k \longmapsto \{g_n(k)\}$

$L := G(K)$ è scattered e metrizzabile $\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ L numerabile

$\overset{\text{Rudin}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{C}^*(L) \simeq \ell^1$ separabile.

X è isometrico ad un sottospazio di $\mathcal{C}(L)$ (in quanto K e L sono omeomorfi) dunque anche X^* è separabile.

($\Rightarrow$) Se K è non-scattered e $\mathcal{C}(K)$ di Asplund, sia $P \subseteq K$ perfetto.

$r: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(P)$ è lineare, continua e onto (Tietze)

$f \longmapsto f_{|P}$

$\Longrightarrow \mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(K)/_{\ker r}$: quoziente di un Asplund.

Sia $Z \subseteq \mathcal{C}(P)$ separabile. $\exists\, W \subseteq \mathcal{C}(K)$ separabile t.c. $Q(W) = Z$ dove $Q: W \to Z$ è la mappa quoziente (onto).

Allora $Q^*: Z^* \to W^*$ iniettiva. Z^* è isomorfo ad un sottospazio di W^*, che è separabile $\Longrightarrow$ Z^* separabile

$\Longrightarrow \mathcal{C}(P)$ Asplund.

Poiché P è perfetto, come per $\mathcal{C}([0,1])$ si mostra che $N_F(\|\cdot\|_\infty) = \mathcal{C}(P)$, che non è di I categoria di Baire $\lightning$

$\square$

4. COMMENTI

- Lemma (3) $\Rightarrow$

  K numerabile $\Longleftrightarrow \mathcal{C}(K)$ Asplund separabile $\Longleftrightarrow \mathcal{C}^*(K)$ separabile.

- Siano $\mathcal{C}(K)$ e $\mathcal{C}(L)$ isomorfi.

$$K \text{ è } \left\{ \begin{array}{l} \text{Eberlein} \\ \text{scattered} \\ \text{numerabile} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \mathcal{C}(K) \text{ è } \left\{ \begin{array}{l} \text{WCG} \\ \text{Asplund} \\ \text{Asplund separabile} \end{array} \right. \overset{\text{isomorfi}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\mathcal{C}(L) \text{ è } \left\{ \begin{array}{l} \text{WCG} \\ \text{Asplund} \\ \text{Asplund separabile} \end{array} \right. \Longleftrightarrow L \text{ è } \left\{ \begin{array}{l} \text{Eberlein} \\ \text{scattered} \\ \text{numerabile} \end{array} \right.$$

(non parlo di $\underbrace{\text{omeomorfismo tra } K \text{ e } L}$, ma di conservazione delle proprietà)

in generale non si può! $\mathcal{C}([0,1]\cup[2,3])$ è isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$ ma i compatti non sono omeomorfi!

5. QUANDO $\mathcal{C}(K)$ è c_0

Sia K un compatto scattered e sia $\alpha(K)$ il minimo ordinale t.c. $K^{(\alpha(K))} = \emptyset$.

Teorema (Bessaga, Pełczyński)

Siano K_1, K_2 spazi compatti numerabili t.c. $\alpha(K_1) \leq \alpha(K_2)$.

Allora

$\mathcal{C}(K_1)$ è isomorfo a $\mathcal{C}(K_2) \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \alpha(K_2) \leq (\alpha(K_1))^n$.

(K metrizzabile)

Notizia: $\mathcal{C}(K)$ è isomorfo a $c_0 \Longleftrightarrow K^{(\omega_0)} = \emptyset$.

Dimostrazione:

$(\Rightarrow)$ $c_0 \simeq \mathcal{C}(K_0) \overset{\text{IP}}{\simeq} \mathcal{C}(K) \Longrightarrow K$ numerabile e $\alpha(K) \geq 2 = \alpha(K_0)$

comp. di $\mathbb{N}$

$\overset{(BP)}{\Longrightarrow} \exists\, n : \alpha(K) \leq (\alpha(K_0))^n \Longrightarrow K^{(\omega_0)} = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ $K^{(\omega_0)} = \emptyset$. $\alpha(K)$ non può essere un ordinale limite $\Rightarrow \exists\, n$:

$K^{(n)} = \emptyset \Longrightarrow K$ numerabile e $\alpha(K) \geq \alpha(K_0)$, inoltre $\exists\, \tilde{n}$:

$\alpha(K) \leq (\alpha(K_0))^n \overset{(BP)}{\Longrightarrow} \mathcal{C}(K)$ e $\mathcal{C}(K_0)$ isomorfi. $\square$

<u>Notizia</u> (<u>Miljutin</u>)

K, L compatti uncountable metrizzabili $\Rightarrow \mathcal{C}(K)$ isomorfo a $\mathcal{C}(L)$.

<u>Osservazione</u>: K metrizzabile.

$\mathcal{C}(K)$ è isomorfo a $\mathcal{C}([0,1]) \Longleftrightarrow K$ uncountable

($\Leftarrow$) Miljutin

($\Rightarrow$) Se K fosse countable, allora $\mathcal{C}(K)$ sarebbe un Asplund separabile, non isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$ (che non è di Asplund).