Una dimostrazione ancora più elementare della caratterizzazione dell'integrabilità secondo Riemann per funzioni di più variabili

L. Vesely, 2018

In questo testo, presentiamo una dimostrazione elementare del fatto che *una funzione limitata è integrabile secondo Riemann su un intervallo compatto di* $\mathbb{R}^d$ *se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla.*

L'idea di questa dimostrazione, che non usa la teoria della misura (solo la definizione elementare di insiemi di misura nulla), proviene dal libro

[E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*]

dove è stata dimostrata la versione per funzioni di una variabile (v. Appendix 1.2 nel libro). Questa dimostrazione è pienamente accessibile ad uno studente del primo anno a Matematica o Fisica.

1. Preliminari

Un insieme $I \subset \mathbb{R}^d$ viene chiamato *intervallo* se è della forma

$$I = I_1 \times \cdots \times I_d \tag{1}$$

dove ogni I_k è un intervallo limitato non degenere in $\mathbb{R}$. Il volume di I è poi il numero (reale strettamente positivo)

$$|I| = \prod_{k=1}^{d} \ell(I_k)$$

dove $\ell(I_k)$ denota la lunghezza (o diametro) di I_k.

Dato un intervallo compatto I come in (1), chiameremo *partizione di* I ogni famiglia finita $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ di intervalli compatti ottenuta come segue: per ogni $1 \le k \le d$ fissiamo una partizione

$$\mathcal{P}_k = \{x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{p_k}^{(k)}\}$$

di I_k, e gli elementi di $\mathcal{P}$ sono poi tutti gli intervalli del tipo

$$\prod_{k=1}^{d} [y_k, z_k]$$

dove, per ogni k, y_k e z_k sono due punti consecutivi di $\mathcal{P}_k$. (In parole povere, $\mathcal{P}$ è composto dagli intervalli compatti che si ottengono con una "quadrettatura" di I data dalle partizioni $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_d$ sugli assi delle coordinate.) Si noti che $\operatorname{card} \mathcal{P} = m = p_1 \dots p_d = \prod_{k=1}^{d} (\operatorname{card} \mathcal{P}_k - 1)$.

Ricordiamo ora la definizione dell'integrale secondo Riemann per funzioni di più variabili. Siano $I \subset \mathbb{R}^d$ un intervallo compatto, e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Ad ogni partizione $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ di I vengono associate la somma superiore e quella inferiore:

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{m} \sup f(J_k)\, |J_k|\,,$$
$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{m} \inf f(J_k)\, |J_k|\,.$$

Analogamente al caso di $d = 1$, è facile vedere che

$$\sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}).$$

Diciamo che f *è integrabile secondo Riemann su* I (e scriviamo $f \in \mathcal{R}(I)$) se

$$\sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}). \tag{2}$$

In tal caso, *l'integrale di Riemann di* f *su* I, denotato con $\int_I f(x)\, dx$, è definito come il comune valore in (2).

Come nel caso di una dimensione, è facile dimostrare che $f \in \mathcal{R}(I)$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{P} \text{ partizione di } I \ : \quad S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

La seguente osservazione, quasi banale per $d = 1$, è geometricamente molto semplice.

Osservazione 1.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}^d$ un intervallo compatto, e siano $K_1, \dots, K_N$ intervalli tali che $I = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{K}_j$. Allora esiste una partizione $\mathcal{P}$ di I tale che*

$$J \in \mathcal{P},\ 1 \leq j \leq N,\ J^\circ \cap K_j^\circ \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad J \subset \overline{K}_j.$$

(In parole povere, $\mathcal{P}$ è una partizione di I che produce contemporaneamente anche una partizione di ogni $\overline{K}_j$.)
Chiameremo tale partizione un "comune raffinamento" della copertura $\{\overline{K_j}\}_{j=1}^{N}$.

Idea della dimostrazione. Nel caso di $d = 1$, è sufficiente prendere come $\mathcal{P}$ la partizione di I data dagli estremi degli intervalli $I, K_1, \dots, K_N$. Nel caso di $d > 1$ si procede analogamente agendo su ciascuna delle coordinate. $\square$

2. Dimostrazione del Teorema

Dati $x \in \mathbb{R}^d$ e $\delta > 0$, denotiamo con $U(x, \delta)$ l'intorno sferico, nella norma $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{R}^d$, di x di raggio δ. Quindi, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ allora

$$U(x, \delta) = \prod_{k=1}^{d} (x_k - \delta, x_k + \delta)$$

che è un intervallo (più precisamente, un cubo) aperto in $\mathbb{R}^d$.

Siano ora I un intervallo compatto e $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Denotiamo

$$\|f\|_\infty = \sup |f|(I)\,.$$

Definiamo inoltre *l'oscillazione di f in un punto $x \in I$* come il numero

$$\operatorname{osc}(f, x) = \inf_{\delta > 0} \operatorname{diam} f(U(x, \delta)) = \lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} f(U(x, \delta))\,.$$

Esercizio 2.1. Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ limitata, $x \in I$.

(a) f è continua in x se e solo se $\operatorname{osc}(f, x) = 0$.

(b) Per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $\{y \in I : \operatorname{osc}(f, x) < \varepsilon\}$ è relativamente aperto in I.

Diciamo che un insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ è di *misura nulla* (oppure "ha misura nulla") se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile $\{I_n\}$ di intervalli aperti tale che $E \subset \bigcup_n I_n$ e $\sum_n |I_n| < \varepsilon$.

Esercizio 2.2. (a) Ogni unione al più numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

(b) Per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}^d$, la sua frontiera ∂I ha misura nulla.

Teorema 2.3. *Siano $I \subset \mathbb{R}^d$ un intervallo compatto, e $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann su I se e solo se l'insieme*

$$D = \{x \in I : f \text{ non è continua in } x\}$$

ha misura nulla.

Dimostrazione. L'implicazione "$\Leftarrow$". Supponiamo che D abbia misura nulla, e fissiamo $\varepsilon > 0$. L'insieme

$$D_\varepsilon = \{x \in I : \operatorname{osc}(f, x) \geq \varepsilon\} \tag{3}$$

è un insieme compatto (Esercizio 2.1) di misura nulla (perché contenuto in D). Esiste quindi una famiglia finita $\{I_n\}_{n=1}^N$ di intervalli aperti tale che

$$D_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n\,, \quad \sum_{n=1}^{N} |I_n| < \varepsilon\,.$$

Anche $C := I \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n$ è un insieme compatto sul quale $\operatorname{osc}(f,\cdot) < \varepsilon$. Per ogni $x \in C$ esiste quindi un suo "intorno cubico" $U_x := U_x(x, \delta_x)$ tale che $\operatorname{diam} f(\overline{U}_x \cap I) < \varepsilon$. Per compattezza, C può essere ricoperto con un numero finito di tali insiemi: $U_{x_1}, \ldots, U_{x_p}$. Ora, sia $\mathcal{P} = \{J_1, \ldots, J_m\}$ una partizione di I che sia un comune raffinamento della copertura

$$\left\{ \overline{I}_n \cap I \right\}_{n=1}^N \cup \{ \overline{U}_{x_i} \cap I \}_{i=1}^p,$$

come in Osservazione 1.1. Denotiamo

$$A = \{1 \le k \le m : \; J_k^\circ \subset I_n \text{ per qualche } 1 \le n \le N\}, \quad B = \{1, \ldots, m\} \setminus A.$$

Ora, $\sum_{k \in A} |J_k| = \sum_{n=1}^N |I_n| < \varepsilon$, e inoltre $\operatorname{diam} f(J_k) < \varepsilon$ per ogni $k \in B$. Allora

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^m \operatorname{diam} f(J_k)\, |J_k| \\ &= \sum_{k \in A} \operatorname{diam} f(J_k)\, |J_k| + \sum_{k \in B} \operatorname{diam} f(J_k)\, |J_k| \\ &\le 2\|f\|_\infty \sum_{k \in A} |J_k| + \varepsilon \sum_{k \in B} |J_k| \\ &< \varepsilon(2\|f\|_\infty + |I|). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{R}(I)$.

L'implicazione "$\Rightarrow$". Siano $f \in \mathcal{R}(I)$ e $\varepsilon > 0$. Dimostriamo prima che l'insieme D_ε (v. (3)) ha misura nulla. Per ogni $\eta > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P} = \{J_k\}_{k=1}^m$ di I tale che $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon\eta$. Denotando

$$E = \{1 \le k \le m : \; D_\varepsilon \cap J_k^\circ \neq \emptyset\},$$

si ha che $\operatorname{diam} f(J_k) \ge \varepsilon$ per ogni $k \in E$. Allora

$$\varepsilon \sum_{k \in E} |J_k| \le \sum_{k \in E} \operatorname{diam} f(J_k)\, |J_k| \le S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon\eta$$

da cui $\sum_{k \in E} |J_k| < \eta$. Ogni intervallo J_k $(k \in E)$ è contenuto in un intervallo *aperto* I_k di volume arbitrariamente vicino a $|J_k|$; possiamo quindi scegliere tali intervalli aperti I_k $(k \in E)$ in modo che ancora si abbia $\sum_{k \in E} |I_k| < \eta$. Siccome gli intervalli I_k $(k \in E)$ ricoprono l'insieme $D_\varepsilon \setminus \bigcup_{k=1}^m \partial J_k$, e $\eta > 0$ era arbitrario, l'insieme $D_\varepsilon \setminus \bigcup_{k=1}^m \partial J_k$ ha misura nulla. Per l'Esercizio 2.2, D_ε ha di misura nulla. Per completare la dimostrazione, è sufficiente osservare che $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}$ per l'Esercizio 2.1, e quindi D è di misura nulla (Esercizio 2.2(a)). $\square$

Corollario 2.4. *La famiglia $\mathcal{R}(I)$ è un'algebra e un reticolo.*
Cioè, $\mathcal{R}(I)$ è uno spazio vettoriale che è chiuso rispetto al prodotto e rispetto ai massimi e minimi (di due o di un numero finito di funzioni).