Il teorema di Sierpiński con contorno

(L.V., appunti per l'SAA del 24 marzo 2014)

Introduzione

E' ben noto e facile da vedere che l'intervallo $[0,1]$ non può essere rappresentato come unione disgiunta di una successione di intervalli chiusi non vuoti. Infatti, altrimenti l'insieme dei punti estremi di tutti questi intervalli sarebbe numerabile, compatto di Hausdorff e privo di punti isolati. Ma ciò non è possibile secondo il Teorema di Baire.[1]

Riportiamo qui un semplice esempio di applicazione di questo fatto. Un insieme convesso C in uno spazio vettoriale topologico Z viene detto *strettamente convesso* se la sua frontiera non vuota non contiene alcun segmento (non banale). Equivalentemente, $\emptyset \neq C \neq Z$ e vale l'implicazione

$$x, y \in C,\ x \neq y \quad \Rightarrow \quad \tfrac{x+y}{2} \in C^{\circ}.$$

Corollario 1. *Uno spazio vettoriale topologico (s.v.t.) Z non può essere piastrellato con una quantità al più numerabile di piastrelle strettamente convesse. Più precisamente:*

> *Z non può essere rappresentato come unione al più numerabile di insiemi strettamente convessi i cui interni siano a due a due disgiunti.*

(In particolare, uno s.v.t. separabile non ammette piastrellamenti con piastrelle strettamente convesse.)

Dimostrazione. Infatti, se fosse possibile, l'insieme dei punti appartenenti a più di una piastrella sarebbe al più numerabile, e quindi esisterebbe un segmento non banale che intersechi almeno due piastrelle, contraddicendo la proprità di $[0,1]$ di cui sopra. $\square$

---

[1] Lo stesso fatto può essere dimostrato anche senza utilizzare il Teorema di Baire. Sia $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ unione disgiunta. Siccome $[0,1] \setminus [a_1, b_1] = \bigcup_{n\geq 2}[a_n, b_n]$ è un aperto in $[0,1]$, esiste un intervallo chiuso di lunghezza positiva $I_2 \subset [0,1] \setminus [a_1, b_1]$ che intersechi almeno due degli intervalli $[a_n, b_n]$, $n \geq 2$. Ripetendo induttivamente lo stesso ragionamento, si trova una successione di intervalli chiusi non vuoti $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, I_n non intersechi $[a_n, b_n]$. Ne segue che i punti dell'intersezione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ non appartengono ad alcun intervallo $[a_i, b_i]$, il che è una contraddizione. Si noti che un procedimento simile viene usato nella dimostrazione del Teorema di Sierpiński (Teorema 7(b) sotto).

La classe $\mathcal{S}$

In quanto segue si suppone che gli spazi ambiente contengano almeno due punti distinti. Se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico, con A°, $\overline{A}$ e ∂A denotiamo rispettivamente l'interno, la chiusura e la frontiera di A.

Definizione 2. Diciamo che uno spazio topologico X appartiene alla classe $\mathcal{S}$ (da "Sierpiński") se ogni volta che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ è un'unione disgiunta di chiusi allora al più uno degli F_n è non vuoto.

Come vedremo fra poco, $[0,1]$ appartiene alla classe $\mathcal{S}$.

Osservazione 3 (Condizioni necessarie)**.** *Se $X \in \mathcal{S}$ allora X è connesso e, se è anche T_1 (cioè, i singoletti sono chiusi), è infinito non numerabile.*

Osservazione 4 (Stabilità della classe $\mathcal{S}$)**.** *$X \in \mathcal{S}$ in ciascuno dei seguenti casi.*

(i) *X è connesso ed è unione di un numero finito di membri di $\mathcal{S}$.*
(ii) *X è immagine continua di un membro di $\mathcal{S}$.*
(iii) *X contiene un sottoinsieme denso che appartiene ad $\mathcal{S}$.*
(iv) *Ogni coppia di punti distinti di X è contenuta in un insieme $Y \subset X$ appartenente ad $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. (ii) e (iv) sono facili.

(i) Se $X = \bigcup_n F_n$ è unione disgiunta di chiusi diversi da X, per la connessione di X infiniti di essi devono essere non vuoti. Se $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$, uno degli X_i interseca infiniti F_n. Ma ciò è impossibile se $X_i \in \mathcal{S}$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

(iii) Se $X = \bigcup_n F_n$ come sopra, allora per densità Y non può essere contenuto in uno degli F_n. D'altra parte, siccome $Y = \bigcup_n (F_n \cap Y) \in \mathcal{S}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $F_n \cap Y = Y$; e ciò è una contraddizione. □

Prima di poter enunciare il teorema principale, abbiamo bisogno di una definizione.

Definizione 5. Sia X uno spazio topologico. Diciamo che:

- X è *ereditariamente di II categoria* (abbreviazione: *HSC*) se ogni suo sottoinsieme chiuso e non vuoto è di II categoria in sé;
- X è un *continuum* se X è compatto, connesso e di Hausdorff.

Secondo il ben noto Teorema di Baire, gli spazi localmente compatti e gli spazi metrici completi sono HSC.

Esempio 6. Uno spazio metrico di Baire (e quindi di II categoria in sé) può non essere HSC. Infatti, si consideri lo spazio metrico $X \subset \mathbb{R}^2$ definito come l'unione del semipiano aperto $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ con l'insieme $Q = \mathbb{Q} \times \{0\}$; allora X è di Baire e Q è chiuso e numerabile in X.

Teorema 7 (Condizioni sufficienti)**.** *$X \in \mathcal{S}$ in ciascuno dei seguenti casi.*

(a) *X è HSC, connesso e localmente connesso.*
(b) *X è un continuum.*

La parte (a) è un semplice lemma, mentre la parte (b) è un ben noto Teorema di Sierpiński del 1918. Le due parti verranno dimostrate nelle prossime due sezioni.

Corollario 8. *Se X contiene un sottoinsieme denso e connesso per archi, allora $X \in \mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Sia $Y \subset X$ denso e connesso per archi. Per il Teorema 7 e l'Osservazione 4(iv), $Y \in \mathcal{S}$. Il resto segue dalla Osservazione 4(iii). □

Esempio 9. Nel Teorema 7(a), l'ipotesi che X sia HSC non può essere omessa. Infatti, esiste uno spazio numerabile, connesso e localmente connesso di Hausdorff (si veda l'articolo G.G. Miller, *Countable connected spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 26(1970), 355–360).

Esempio 10. La parte (b) del Teorema 7 non segue dalla parte (a). Infatti, un continuum può non essere localmente connesso: si consideri il continuum $X \subset \mathbb{R}^2$ che è l'unione del grafico di $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in (0, 1]$, e del segmento verticale $\{0\} \times [-1, 1]$, che non è localmente connesso nel punto $(0, 1)$.

Dimostrazione del Teorema 7(a)

Lemma 11. *Sia X HSC e localmente connesso. Se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ è unione disgiunta di chiusi, allora tutti gli F_n sono clopen (cioè, aperti e chiusi).*

Dimostrazione. Supponiamo che qualche F_n non sia aperto, cioè ha dei punti di frontiera. Allora l'insieme

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial F_n$$

è chiuso e non vuoto, e quindi di II categoria in sé. Quindi almeno uno degli insiemi ∂F_k deve avere punti interni in T. Esistono quindi $x \in \partial F_k$ e un intorno connesso V di x tali che

$$V \cap T \subset \partial F_k.$$

Siccome V interseca il complementare di F_k, esso deve intersecare qualche F_j con $j \neq k$. Siccome $V \cap \partial F_j = \emptyset$, si ha che $V \cap F_j = V \cap F_j^\circ$ e quindi $V \cap F_j$ è clopen in V. Essendo $V \cap F_j$ non vuoto e diverso da V, ciò contraddice la connessione di V. □

Dimostrazione di Teorema 7(a). Nella situazione in Lemma 11, se X è anche connesso, ogni F_n deve essere vuoto o uguale a X. □

Dimostrazione del Teorema 7(b)

La presente dimostrazione del Teorema di Sierpiński è tratta dal libro *General Topology* di R. Engelking. Il cuore della dimostrazione è il Lemma 16, mentre i Lemmi 13 e 15 sono solo degli strumenti tecnici.

Definizione 12. Sia x un punto di uno spazio topologico X. Denotiamo con:
- C_x la *componente* di x, cioè, l'unione di tutti i connessi contenenti x;
- Q_x la *quasi-componente* di x, cioè, l'intersezione di tutti gli insiemi clopen contenenti x.

Non è difficile dimostrare che:
- ogni componente è connessa;
- ogni componente/quasi-componente è un insieme chiuso;
- due componenti/quasi-componenti o coincidono o sono disgiunte.

Lemma 13. *Per ogni $x \in X$,*

(i) $C_x \subset Q_x$;
(ii) *se X è compatto di Hausdorff allora $C_x = Q_x$.*

Dimostrazione.

(a) Essendo C_x connesso, è contenuto in ogni insieme clopen che lo interseca.

(b) Per (a), basta dimostrare che Q_x è connesso. Supponiamo che $Q_x = F_1 \cup F_2$ con F_1, F_2 chiusi e disgiunti. Siccome X è normale, esistono due aperti disgiunti G_1, G_2 tali che

$$Q_x \subset G_1 \cup G_2\,, \quad F_i \subset G_i \ (i = 1, 2).$$

La definizione di Q_x e la compattezza di X implicano l'esistenza di un insieme clopen $D \ni x$ tale che $D \subset G_1 \cup G_2$. Allora $G_1 \cap D$ è clopen, in quanto

$$\overline{G_1 \cap D} \subset \overline{G}_1 \cap D \subset D \setminus G_2 = G_1 \cap D.$$

Quindi $Q_x \subset G_1 \cap D$. Di conseguenza,

$$F_2 \subset Q_x \cap G_2 \subset G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

□

Esempio 14. In generale, può capitare che $C_x \neq Q_x$. Infatti, si consideri lo spazio $X \subset \mathbb{R}^2$ definito come l'unione dei segmenti orizzontali

$$[0, 1] \times \{\tfrac{1}{n}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

e dell'insieme $\{x, y\}$ dove $x = (0, 0)$ e $y = (1, 0)$. E' facile vedere che

$$C_x = \{x\}\,, \quad Q_x = \{x, y\}\,.$$

Lemma 15. *Siano F un sottoinsieme chiuso, non vuoto e proprio di un continuum X. Allora ogni componente connessa di F interseca ∂F.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista una componente C di F tale che $C \cap \partial F = \emptyset$, cioè, che $C \subset F^\circ$. Fissiamo $x \in C$. Per il Lemma 13, $C = Q_x$ (la quasi-componente di x). Dalla definizione di Q_x e dalla compattezza di F segue l'esistenza di un insieme $D \subset F$ clopen in F tale che $D \subset F^\circ$. Siccome D è aperto in F, esiste un aperto $A \subset X$ tale che $A \cap F = D$. Allora

$$A \cap \partial F = A \cap F \cap \partial F = D \cap \partial F = \emptyset.$$

Ora, $D = A \cap F = A \cap F^\circ$ da cui segue che D è clopen anche in X. Ma ciò contraddice la connessione di X. □

Lemma 16. *Sia X un continuum. Supponiamo che $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ sia unione disgiunta di chiusi di cui almeno due non vuoti. Allora esiste un continuum $C \subset X$ tale che C non intersechi F_1 ma intersechi almeno altri due insiemi F_n.*

Proof. Se $F_1 = \emptyset$, è sufficiente porre $C = X$. Supponiamo quindi che $F_1 \neq \emptyset$. Fissiamo $j > 1$ tale che $F_j \neq \emptyset$. Per normalità, esistono due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $F_1 \subset U$ e $F_j \subset V$.

Fissiamo un qualsiasi $x \in F_j$ e denotiamo con C la componente di x in $\overline{V}$. Allora C è un continuum che non interseca F_1 ma interseca F_j. Rimane da dimostrare che C interseca qualche F_i con $i \neq j$. Per il Lemma 15, esiste $y \in C \cap \partial \overline{V}$. Siccome $F_j \subset V \subset (\overline{V})^\circ$, abbiamo che $y \notin F_j$. Quindi y deve appartenere a qualche altro F_i, $i \notin \{1, j\}$. □

Ora, la dimostrazione del Teorema di Sierpiński è quasi fatta.

Dimostrazione del Teorema 7(b). Sia X un continuum tale che $X = \bigcup_n F_n$ sia unione disgiunta di chiusi. Se almeno due tra gli F_n sono non vuoti, possiamo usare il Lemma 16 per costruire induttivamente una successione di continuum non vuoti $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ per cui

$$C_n \cap F_n = \emptyset \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Per compattezza, esiste $x \in \bigcap_{n=1}^\infty C_n$; ma tale x deve appartenere a qualche F_n, il che è impossibile. □