Boundary Problem

21 aprile 2010

Definizione

X spazio di Banach, $B \subseteq B_{X^*}$ é una boundary di James per X se per ogni $x \in X$ esiste $b \in B$ tale che $b(x) = \|x\|$.

Es. $\mathrm{Ext} B_{X^*}$ é una boundary di James per X.

- 1980: Bourgain e Talagrand dimostrano che la topologia debole e la topologia $\sigma(X, \mathrm{Ext} B_{X^*})$ ammettono gli stessi compatti;
- Godefroy si chiede se questo possa valere per una qualsiasi boundary di James su X;
- esisteva giá una risposta affermativa nel caso di insiemi convessi;
- 2008: Pfitzner risponde positivamente al problema aperto da Godefroy.

Grazie al teorema di Pfitzner si ottiene una dimostrazione alternativa del teorema di James.

L'uguaglianza di Simons

Teorema (Simons)

Sia B una boundary in uno spazio di Banach X. Se $\{x_n\}$ é una successione limitata in X, allora vale:

$$\sup \{\limsup(f(x_n)) : f \in B\} = \sup \{\limsup(f(x_n)) : f \in B_{X^*}\}.$$

IL Teorema di Behrends

Definizione

Sia X spazio di Banach, (x_n) successione limitata e $\varepsilon > 0$. Allora (x_n) ammette ε-ℓ^1-blocchi se per ogni $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito esistono $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ con $\sum |a_k| = 1$ e $i_1 < \ldots < i_r$ in M tali che

$$\left\| \sum a_\rho x_{i_\rho} \right\| < \varepsilon.$$

Utilizziamo ora alcuni risultati della teoria di Ramsey.

Teorema (Behrends)

Sia X spazio di Banach reale, (x_n) sua successione limitata. Se esiste un $\varepsilon > 0$ per cui (x_n) ammette ε-ℓ^1-blocchi allora esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) di (x_n) "approssimativamente" debole di Cauchy con costante ε. Cioé $\forall f \in S_{X^*}$ vale:

$$\limsup f(x_{n_k}) - \liminf f(x_{n_k}) \leq 2\varepsilon.$$

Grazie a questo risultato si puó dimostrare in maniera semplice il Teorema di Rosenthal.

Successioni limitate

Associamo ad ogni successione limitata (x_n) in uno spazio di Banach reale X e per ogni $D \subseteq X^*$ tre parametri:

1. $\varepsilon_J(x_n) = \sup_m \inf_{\sum_{n \geq m} |\alpha_n| = 1} \left\| \sum_{n \geq m} \alpha_n x_n \right\|$;
2. $\delta_D(x_n) = \sup_{f \in D} (\limsup f(x_n) - \liminf f(x_n))$;
3. $\delta_{HJ,D}(x_n) = \sup_{f \in D} (\limsup f(x_n))$;

Nel caso in cui $D = B_{X^*}$ si indica $\delta = \delta_D$ e $\delta_{HJ,D} = \delta_{HJ}$.

Osservazione

Vale che:

- $\varepsilon_J(x_n) > 0$ *se e solo se* (x_n) *é definitivamente una successione* ℓ^1*;*
- $\delta(x_n) = 0$ *se e solo se* (x_n) *é debolmente di Cauchy;*
- $\delta_{HJ}(x_n) = 0$ *se e solo se* (x_n) *converge debolmente a zero.*

Nel passaggio alle sottosuccessioni vale che ε_J é non decrescente, mentre δ_D e $\delta_{HJ,D}$ sono non crescenti.

Definizione

$$\widetilde{\varepsilon}_J(x_n) = \sup_{n_k} \varepsilon_J(x_{n_k}) \text{ } e \text{ } \widetilde{\delta}_D(x_n) = \inf_{n_k} \delta_D(x_{n_k})$$

(x_n) *si dice* ε_J*-stabile se* $\widetilde{\varepsilon}_J(x_n) = \varepsilon_J(x_n)$ *mentre viene detta* δ_D*-stabile se* $\widetilde{\delta}_D(x_n) = \delta_D(x_n)$*.*

Proposizione

- $\delta_{HJ}(x_n) \geq \varepsilon_J(x_n)$;
- $\delta(x_n) \geq 2\varepsilon_J(x_n)$.

L'idea della dimostrazione é la costruzione di un funzionale lineare e continuo φ, con

$$\varphi : \overline{\mathrm{span}\,\{x_n\}}_{n \geq m} \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\varphi(x_n) := (-1)^n \varepsilon_J(x_n).$$

Osserviamo quindi come φ sia estendibile a tutto lo spazio X con un funzionale f appartenente a B_{X^*} e da ció si possa ottenere la tesi.

Proposizione

Sia X uno spazio di Banach reale e (x_n) una sua successione limitata.Vale che se (x_n) é una successione ε_J-stabile allora $\forall \eta > 0$ (x_n) ammette $(\varepsilon_J(x_n) + \eta)$-$\ell^1$-blocchi.

Grazie alla proposizione, utilizzando il Teorema di Behrends si puó mostrare, nel caso (x_n) sia ε_J-stabile, come esista una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che, $\forall \eta > 0$ valga:

$$\limsup f(x_{n_k}) - \liminf f(x_{n_k}) \leq 2(\varepsilon_J(x_n) + \eta)$$

e da qui per la definizione di δ e $\widetilde{\delta}$ otteniamo:

$$\frac{\widetilde{\delta}(x_n)}{2} - \eta \leq \varepsilon_J(x_n).$$

Lemma

(i) Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione che sia ε_J-stabile ed una che sia δ-stabile.
(ii) Se (x_n) é ε_J-stabile allora vale:

$$\widetilde{\delta}(x_n) = 2\widetilde{\varepsilon}_J(x_n).$$

Per dimostrare il punto (i) notiamo che esiste una sottosuccessione $(y_n^{(1)})$ di (x_n) tale che:

$$\varepsilon_J(y_n^{(1)}) \geq \widetilde{\varepsilon}_J(x_n) - 2^{-1}.$$

Reiterando il procedimento, $\forall k \in \mathbb{N}$, scegliamo una sottosuccessione $(y_n^{(k+1)})$ di $(y_n^{(k)})$ tale che

$$\varepsilon_J(y_n^{(k+1)}) \geq \widetilde{\varepsilon}_J(y_n^{(k)}) - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Notiamo quindi come la successione diagonale (z_n) con $z_n = y_n^{(n)}$ $\forall n$ sia una sottosuccessione di (x_n) che sia ε_J-stabile.

Per dimostrare il punto (ii) usiamo ancora un procedimento diagonale utilizzando la proposizione precedente.
Sia (η_k) una successione di numeri reali positivi decrescente a zero.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una sottosuccessione $(x_n^{(k)})$ di (x_n) tale che

$$\varepsilon_J(x_n^{(k)}) \geq \widetilde{\delta}(x_n)/2 - \eta_k.$$

Prendiamo la successione diagonale (y_n) con $y_n = x_n^{(n)}$ da qui risulta

$$\widetilde{\varepsilon}_J(x_n) \geq \varepsilon_J(y_n) \geq \frac{\delta(x_n)}{2} \geq \frac{\widetilde{\delta}(x_n)}{2}.$$

Riscrivendo l'uguaglianza di Simons nelle nostre notazioni otteniamo, data una boundary B,:

$$\delta_{HJ,B} = \delta_{HJ}.$$

Da qui otteniamo il seguente:

Lemma

Se B é una boundary per X allora:

- $\delta = \delta_B$;
- $\widetilde{\delta} = \widetilde{\delta_B}$.

Viene ora costruita su X la topologia generata da una boundary B su X, $\sigma(X, B)$.
Indichiamo direttamente la topologia con B.

Lemma

Sia B una boundary per X, (x_n) sia una successione ℓ^1 in X e $\eta_k > 0$ una successione di numeri reali decrescente a zero. Allora esiste una successione (b_k) di elementi di B, un albero di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ $(\Omega_\sigma)_{\sigma \in S}$ e $\varepsilon \geq \varepsilon_J(x_n)$ tale che per ogni k:

$$b_k(x_n - x_{n'}) > 2(1 - \eta_k)\varepsilon \tag{1}$$

se $n \in \Omega_\sigma, n' \in \Omega_{\sigma'}$, $\sigma, \sigma' \in S_k$ e $\sigma_k = 0, \sigma_k^{'} = 1$.
Se inoltre l'insieme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente B-compatto in X, allora esiste una successione (y_m) di punti di B-accumulazione della successione (x_n) tale che

$$b_k(y_m - y_{m'}) \geq 2(1 - \eta_k)\varepsilon \text{ se } m \leq k < m',\ k, m, m' \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Insiemi B-compatti

Teorema (Pfitzner)

Ogni sottoinsieme limitato e B-compatto in uno spazio di Banach reale X non contiene una successione ℓ^1.

La dimostrazione viene fatta per assurdo.
Sia (y_n) una successione ℓ^1 in un sottoinsieme limitato e B-compatto.
Esiste una sottosuccessione ε_J-stabile (x_n).
Siano ora $(\eta_k) \subset \mathbb{R}^+$ successione decrescente a zero, $\varepsilon \geq \widetilde{\varepsilon}_J(x_n)$ e due successioni (b_k) e (y_m) come nel lemma precedente.
Poniamo ora

$$x = (\sum 2^{-m} y_m) - y = \sum 2^{-m}(y_m - y)$$

dove y é un punto di B-accumulazione degli (y_m).

Per il lemma e la continuitá di b_k vale

$$b_k(y_m - y) \geq 2(1 - \eta_k)\varepsilon$$

e inoltre $b(y_m) - b(y) \leq \delta(x_n) \leq 2\varepsilon$ per ogni $b \in B$ se $\|x\| \leq 2\varepsilon$. Tramite le maggiorazioni e il fatto che B é una boundary otteniamo:

$$\|x\| = \sup_k b_k(x) = 2\varepsilon.$$

Essendo B una boundary esiste $b_0 \in B$ tale che $b_0(x) = 2\varepsilon$ perció $b_0(y_m) = 2\varepsilon + b_0(y)$ ma essendo y punto di B-accumulazione vale

$$b_0(y) = 2\varepsilon + b_0(y)$$

assurdo perché $\varepsilon > 0$.

Teorema (Pfitzner)

Ogni sottoinsieme di uno spazio di Banach reale X che sia B-compatto é anche debolmente compatto

Sia (x_n) successione in A, insieme B-compatto:

$\Rightarrow$ (Rosenthal) ammette una sottosuccessione debolmente di Cauchy,

$\Rightarrow$ essendo B-compatto tende ad un limite $x \in A$,

$\Rightarrow$ (Simons) $\delta_{HJ}(x_{n_k} - x) = \delta_{HJ,B}(x_{n_k} - x) = 0$,

$\Rightarrow$ (Eberlein-Šmulian) A é debolmente compatto.

Teorema (James)

Uno spazio di Banach reale X é riflessivo se e solo se ogni $f \in X^*$ assume la sua norma.

$(\Rightarrow)$ dal teorema di Hahn - Banach;

$(\Leftarrow)$

- $B_{\hat{X}}$ é una boundary per X^*;
- $B_{\hat{X}}$ genera la topologia w^* su X^*;
- (Alaoglu) B_{X^*} é w^*-compatta;
- (Pfitzner) B_{X^*} é debolmente compatta in X^*;
- X^* é riflessivo e quindi X é riflessivo.