Una panoramica sul boundary problem

Stefania D'Alessandro

7 maggio 2009

Sommario

Sia X uno spazio di Banach. $B \subseteq B_{X^*}$ è una *boundary* per B_{X^*} qualora tutti i funzionali dell'immersione isometrica di X in X^{**} assumano la norma su B. Nel corso del seminario saranno presentati due problemi fondamentali sulle boundary: il primo si riferisce alla possibilità di recuperare tutta la bolla del duale prendendo la chiusura forte dell'involucro convesso della boundary; il secondo (formulato da G. Godefroy e battezzato come *boundary problem*) concerne la topologia debole $\sigma(X, B)$, meno fine di w, generata dalla boundary su X, e più esplicitamente riguarda i sottoinsiemi $\|\cdot\|$-limitati e $\sigma(X, B)$-compatti di X, sulla w-compattezza dei quali ci si interroga. Saranno riassunti i risultati fondamentali riguardanti entrambe le questioni (la prima delle quali ha risposta negativa nella massima generalità; la seconda è rimasta aperta fino all'anno scorso ma in questo caso l'epilogo è positivo) e verranno schematizzate le dimostrazioni della soluzione al boundary problem nel caso particolare in cui X sia un preduale di L^1 e infine nel caso generale.

Indice

1 Introduzione

1.1 Presentazioni

Definizione 1.1. Sia X uno spazio di Banach. $B \subseteq B_{X^*}$ è una *boundary* per B_{X^*}[1] qualora $\forall x \in X\ \exists x^* \in B$ tale che $x^*(x) = \|x\|$.

Osservazione 1.2. Una boundary è il luogo in cui i funzionali dell'immersione isometrica di X in X^{**} realizzano la norma.

Esempio 1.3. $\mathrm{ext}B_{X^*}$ è una boundary. Ciò segue direttamente dal Teorema A.1 con i seguenti personaggi: (X^*, w^*) è lo spazio lineare topologico localmente convesso, B_{X^*} il convesso w^*-compatto e $x\colon B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione convessa e w^*-u.s.c. (in quanto lineare e w^*-continua). Si può quindi concludere che x assume il suo massimo su B_{X^*} (i.e. la sua norma) in qualche elemento di $\mathrm{ext}B_{X^*}$ (che risulta pertanto essere una boundary, come annunciato).

La Definizione 1.1 ha un'ovvia generalizzazione.

Definizione 1.4. Siano X uno spazio di Banach e $K \subseteq X^*$ w^*-compatto. $B \subseteq K$ è una *boundary di James* per K se $\forall x \in X\ \exists b \in B$ tale che $b(x) = \sup x(K)$.

1.2 Topologia e dintorni

Notazione. Sia X uno spazio di Banach e B una boundary. La topologia debole generata dalla boundary su X verrà indicata con $\sigma(X, B)$.

Osservazione 1.5. $\sigma(X, B)$ è meno fine di $w = \sigma(X, X^*)$, dunque tutti i w-compatti sono anche $\sigma(X, B)$-compatti.

Osservazione 1.6. $\sigma(X, B)$ è di Hausdorff. Basta provare che la famiglia di seminorme associate agli elementi della boundary è separante, i.e. $\bigcap_{f \in B} \ker f = \{0\}$. Se così non fosse, dovrebbe esistere $0 \neq x \in \bigcap_{f \in B} \ker f$, il che non può accadere perché $\|x\| \neq 0$ ed evidentemente non può esistere $f \in B$ tale che $f(x) = \|x\|$ dato che tutti i funzionali della boundary si annullano su x, quindi questa circostanza non può sussistere.

Osservazione 1.7. Siano X uno spazio di Banach, $K \subseteq X^*$ convesso e w^*-compatto e $B \subseteq K$ una boundary di James per K. Allora

$$K = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*} B.$$

[1] In tal caso la chiamerò semplicemente *boundary*.

L'inclusione ($\supseteq$) è ovvia. Per mostrare ($\subseteq$) suppongo per assurdo che $\exists x_0^* \in K \setminus \underbrace{\overline{\text{conv}}^{w^*} B}_{=:K_0}$. Separo fortemente i convessi w^*-compatti $\{x_0^*\}$ e K_0 con Hahn-Banach mediante un certo funzionale w^*-continuo $x_0 \in X$, i.e.

$$x_0^*(x_0) > \max x_0(K_0).$$

Poiché $B \subseteq K_0$ si ha $\max x_0(K_0) \geq \max x_0(B)$; $x_0 \in X$ e B è una boundary di James per K perciò $\exists k_0^* \in B$ tale che $k_0^*(x_0) = \max x_0(K)$. Si ottiene quindi

$$\max x_0(B) \geq k_0^*(x_0) = \max x_0(K_0).$$

D'altra parte $x_0^* \in K$: assemblando tutti i risultati si ottiene

$$\max x_0(K) \geq x_0^*(x_0) > \max x_0(K_0) \geq \max x_0(B) \geq k_0^*(x_0) = \max x_0(K)$$

e la presenza della disuguaglianza stretta rende tutto assurdo.

1.3 Due problemi sulle boundary

(BS) Quando una boundary è **strong**? Si sostituisca w^* con $\|\cdot\|$ nell'Osservazione 1.7. Siano X uno spazio di Banach e $B \subseteq B_{X^*}$ una boundary.

$$B_{X^*} \stackrel{?}{=} \overline{\text{conv}}^{\|\cdot\|} B$$

(con ovvi adattamenti per ottenere la formulazione del problema per le più generiche boundary di James).

(BP) **Boundary problem**. Sia X uno spazio di Banach e sia $H \subseteq X$.

$$H \ \|\cdot\|\text{-limitato e } \sigma(X,B)\text{-compatto} \stackrel{?}{\Longrightarrow} H \ w\text{-compatto}$$

Osservazione 1.8. Se (BS) avesse risposta positiva, allora anche (BP) l'avrebbe. L'asserto si ottiene mostrando la w-compattezza per nets con un'argomentazione basata su un "ponte".
Sia $H \subseteq X$ $\|\cdot\|$-limitato e $\sigma(X,B)$-compatto. Valga $B_{X^*} = \overline{\text{conv}}^{\|\cdot\|} B$. Mostro la w-compattezza per nets di H. Sia $\{x_\alpha\} \subseteq H$ una net. H è $\sigma(X,B)$-compatto, dunque esistono $x \in H$ e una subnet $\{x_\beta\}$ di $\{x_\alpha\}$ tali che $x_\beta \xrightarrow{\sigma(X,B)} x$, i.e. $b^*(x_\beta) \xrightarrow{\mathbb{R}} b^*(x)$ per ogni $b^* \in B$.
Sia ora $x^* \in X^*$ (WLOG $\|x^*\| \leq 1$).

$$\begin{aligned} |x^*(x_\beta) - x^*(x)| &\leq \left| x^*(x_\beta) - \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*(x_\beta) \right| \\ &+ \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*(x_\beta) - \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*(x) \right| \\ &+ \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*(x) - x^*(x) \right| \end{aligned}$$

dove $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^* \in \operatorname{conv} B$ è scelta in maniera opportunamente $\|\cdot\|$-vicina a x^* (grazie alla densità). Allora, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}|x^*(x_\beta) - x^*(x)| &\leq \underbrace{\left\| x^* - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^* \right\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4M}} \underbrace{(\|x_\beta\| + \|x\|)}_{\leq 2M} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^* (x_\beta - x) \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

per $\beta \succcurlyeq \beta_0$ opportuno (perché $x_\beta \xrightarrow{\sigma(X,B)} x$). In conclusione $x_\beta \xrightarrow{w} x$.

1.4 Alcune risposte

Citiamo, a titolo di esempio, alcuni casi particolari in cui (BS) ha risposta positiva (nei quali automaticamente si ha risposta positiva anche a (BP), per l'Osservazione 1.8) e qualche parziale risposta a (BP). Si può evincere quanto entrambi i problemi siano stati ampiamente e lungamente studiati.

(BS) 1976 Haydon: $\ell^1 \not\subseteq X$ e $B = \operatorname{ext} B_{X^*}$

1981 Rodé: B separabile

1987 Namioka: K $\|\cdot\|$-fragmented generico

1987 Godefroy: X separabile e $\ell^1 \not\subseteq X$

1999 Fonf: X separabile poliedrale

(BP) 1952 Grothendieck: $X = \mathcal{C}(K)$ e $B = \operatorname{ext} B_{X^*}$

1963 Rainwater: $B = \operatorname{ext} B_{X^*}$ e H $\sigma(X, B)$-sequenzialmente compatto

1972 James: $B_X \subseteq B_{X^{**}}$ boundary

1972 Simons: H $\sigma(X, B)$-sequenzialmente compatto e B arbitrario

1974 de Wilde: H convesso e B arbitrario

1982 Bourgain-Talagrand: $B = \operatorname{ext} B_{X^*}$ e H qualunque

Osservazione 1.9. (BS) <u>non</u> ha risposta positiva nella più ampia generalità! (BP) è rimasto aperto fino all'anno scorso, quando finalmente Pfitzner ha sancito un "sì" come risposta nel caso generale.

2 Il caso dei preduali di L^1

2.1 Cenni alla costruzione di un preduale di L^1

Definizione 2.1. Sia X uno spazio di Banach. X è un *preduale di* L^1 se $\exists \mu$ misura tale che X^* sia isometrico a $L^1(\mu)$.

- Sia X uno spazio topologico localmente compatto. Introduciamo
$$\mathcal{M}^+(X) = \{\text{misure positive di Radon su } X\}$$
(dove ricordiamo che una misura di Radon è una misura boreliana, finita e regolare) e
$$\mathcal{M}^1(X) = \left\{\mu \in \mathcal{M}^+(X) : \mu \text{ di probabilità}\right\}.$$

- Sia X un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Definiamo
$$\mathcal{U}(X) = \{u : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ affine continua}\}.$$
$(\mathcal{U}(X); \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

- Sia $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. $r(\mu)$ è il *baricentro* di μ se
$$f\left(r(\mu)\right) = \int_X f d\mu \quad \forall f \in X^*.$$

- Introduciamo un ordine parziale $\preccurlyeq$ su $\mathcal{M}^+(X)$: date $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(X)$
$$\mu \preccurlyeq \nu \Leftrightarrow \mu(f) \leq \nu(f) \quad \forall f \in K$$
dove K è il cono convesso delle funzioni convesse continue su X.

- X è un *simplesso di Choquet* se $\forall x \in X \ \exists! \mu \in \mathcal{M}^1(X)$ $\preccurlyeq$-massimale tale che $r(\mu) = x$.

Esempio 2.2. $(\mathcal{U}(X); \|\cdot\|_\infty)$ con X simplesso di Choquet è preduale di L^1.

Per qualche informazione in più: [3], [5].

2.2 Il risultato di Spurný

Teorema 2.3 (Spurný, 2007)**.** *Sia X un preduale di L^1 e sia $B \subseteq B_{X^*}$ una boundary. Allora vale:*
$$K \subseteq X \text{ limitato e } \sigma\left(X, B\right)\text{-compatto} \Rightarrow K \ w\text{-compatto.}$$

"Dimostrazione". WLOG B simmetrico e $K \subseteq B_X$.[2]

(1) K $\sigma(X, B)$-compatto $\Longrightarrow$
K $\sigma(X, B)$-numerabilmente compatto $\Longrightarrow$
K $\sigma(X, B)$-relativamente numerabilmente compatto $\overset{\text{Lemma 2.4}}{\Longrightarrow}$
K w-relativamente sequenzialmente compatto;

[2]Queste richieste vanno lette in un'ottica di sfruttamento di un lemma che riportiamo successivamente.

(2) $K\ \sigma(X,B)$-compatto $\overset{\sigma(X,B)\ T_2}{\Longrightarrow}$
$K\ \sigma(X,B)$-chiuso $\overset{\sigma(X,B)\subseteq w}{\Longrightarrow}$
K w-chiuso.

Da (1) e (2) si evince che K è w-sequenzialmente compatto. Il Teorema di Eberlein-Šmulyan ci dà la w-compattezza di K. □

È chiaro che tutta la dimostrazione poggia su un lemma (come preannunciato), della cui dimostrazione presentiamo ora un'idea (prestando fede a tre fatti): sostanzialmente essa si basa su una doppia applicazione del Teorema di Choquet.

Lemma 2.4. *Sia X un preduale di L^1 e sia $B \subseteq B_{X^*}$ una boundary simmetrica. Sia $K \subseteq B_X$ $\sigma(X,B)$-relativamente numerabilmente compatto. Allora K è w-relativamente sequenzialmente compatto.*

"Dimostrazione". Sia $\{x_n\} \subseteq K$.

Voglio. $\{y_k\} \subseteq \{x_n\}$ w-convergente.

Sia
$$Y_1 := \overline{\text{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Fatto 1. $\exists\{y_k\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $\{y^*(y_k)\}$ converga $\forall y^* \in \text{ext}B_{Y_1{}^*}$.

Sia $x \in X$ un $\sigma(X,B)$-punto di accumulazione per $\{y_k\}$ (regalato dall'ipotesi di $\sigma(X,B)$-relativa numerabile compattezza).

Fatto 2. $\exists$ Y_2 sottospazio di X separabile e preduale di L^1 tale che
$$\overline{\text{span}}\,(Y_1 \cup \{x\}) \subseteq Y_2 \subseteq X.$$

Consideriamo le mappe di restrizione
$$B_{X^*} \xrightarrow{\varphi_2} B_{Y_2{}^*} \xrightarrow{\varphi_1} B_{Y_1{}^*}.$$

Fatto 3. Valgono le inclusioni:

(1) $\varphi_1(\text{ext}B_{Y_2{}^*}) \supseteq \text{ext}B_{Y_1{}^*}$

(2) $\varphi_2(B) \supseteq \text{ext}B_{Y_2{}^*}$

Abbiamo ora tutto quello che serve per mostrare che la nostra candidata successione w-converge effettivamente a x. L'idea è di procedere per gradi, partendo dai funzionali appartenenti all'insieme dei punti estremi della bolla di $Y_1{}^*$, raccattando poi tutti i funzionali di X^* utilizzando due volte il teorema di rappresentazione integrale di Choquet.

Sia $x^* \in B_{Y_1^*}$. Per il Teorema A.2, assegnati i ruoli $(X, \tau) = (Y_1^*, w^*)$ (dove $w^* = \sigma(Y_1^*, Y_1)$) e $K = B_{Y_1^*}$ w^*-compatto, convesso e metrizzabile ($\Leftrightarrow Y_1$ separabile), $\exists \mu \in \mathcal{M}^1(B_{Y_1^*})$ tale che $\mu(\text{ext}B_{Y_1^*}) = 1$ e

$$x^*(z) = \int_{\text{ext}B_{Y_1^*}} y^*(z) d\mu(y^*) \quad \forall z \in Y_1.$$

Poiché $\{y_k\} \subseteq Y_1$ si ha

$$x^*(y_k) = \int_{\text{ext}B_{Y_1^*}} \underbrace{y^*(y_k)}_{\text{converge!}} d\mu(y^*)$$

da cui, per il Teorema della Convergenza Dominata (DCT), si ha che $\{x^*(y_k)\}$ converge.
Quindi $\{x^*(y_k)\}$ converge per ogni $x^* \in B_{Y_1^*}$ e dunque $\{(\varphi_1 y^*)(y_k)\}$ converge per ogni $y^* \in B_{Y_2^*}$.
Dalla seconda inclusione annunciata nel Fatto 3 segue che $x_{|\text{ext}B_{Y_2^*}}$ è un punto di accumulazione per $\left\{y_{k|\text{ext}B_{Y_2^*}}\right\}$. In conclusione

$$y^*(y_k) \longrightarrow y^*(x) \quad \forall y^* \in \text{ext}B_{Y_2^*}.$$

Applichiamo di nuovo Choquet con $X = Y_2^*$ e $K = B_{Y_2^*}$. Sia $y^* \in B_{Y_2^*}$. Allora per μ opportuna si ha

$$y^*(y_k) = \int_{\text{ext}B_{Y_2^*}} \underbrace{u^*(y_k)}_{\text{converge!}} d\mu(u^*)$$

e sempre per (DCT) si conclude che $\{y^*(y_k)\}$ converge per ogni $y^* \in B_{Y_2^*}$, i.e.

$$y_k \xrightarrow{\sigma(Y_2, Y_2^*)} x.$$

Infine, $x \in Y_2$ e $\sigma(X, X^*)_{|Y_2} = \sigma(Y_2, Y_2^*)$, dunque

$$y_k \xrightarrow{w} x.$$

□

3 "Boundaries for Banach spaces determine weak compactness": la soluzione

3.1 Risultati tecnici preliminari

In questa sezione sia X uno spazio di Banach e sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione <u>limitata</u>.

Definizione 3.1. La *costante di James* di $\{x_n\}$ è

$$\varepsilon_J(x_n) := \sup_m \inf_{\sum_{n\geq m}|\alpha_n|=1} \left\| \sum_{n\geq m} \alpha_n x_n \right\|.$$

Osservazione 3.2. $\varepsilon_J(x_n) \geq 0$ per ogni successione $\{x_n\}$ e $\varepsilon_J(x_n) > 0$ se e solo se esiste m tale che $\{x_n\}_{n\geq m}$ sia una ℓ^1-sequence, i.e. una successione equivalente alla base canonica di ℓ^1 mediante un omeomorfismo lineare (quindi si hanno i controlli sia dall'alto che dal basso delle norme delle serie costruite con multipli degli elementi della successione nei termini della norma ℓ^1 dei coefficienti della serie).

Definizione 3.3. Sia $D \subseteq X^*$. Introduciamo

$$\delta_D(x_n) := \sup_{x^*\in D} \{\limsup x^*(x_n) - \liminf x^*(x_n)\}$$

e poniamo $\delta := \delta_{B_{X^*}}$.

Osservazione 3.4. $\delta(x_n) = 0 \Leftrightarrow \{x_n\}$ è w-Cauchy.

Osservazione 3.5. Passando a sottosuccessioni ε_J risulta non-decrescente e δ_D non-crescente.

Hanno quindi senso le seguenti definizioni.

Definizione 3.6. $\tilde{\delta}_D := \inf_{n_k} \delta_D(x_{n_k})$

Definizione 3.7. $\tilde{\varepsilon}_J := \sup_{n_k} \varepsilon_J(x_{n_k})$

Definizione 3.8. $\{x_n\}$ è *ε_J-stabile* (risp. *δ_D-stabile*) se $\tilde{\varepsilon}_J(x_n) = \varepsilon_J(x_n)$ (risp. $\tilde{\delta}_D(x_n) = \delta_D(x_n)$).

Lemma 3.9.

- *$\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ ε_J-stabile tale che $\tilde{\delta}_D(x_{n_k}) = 2\tilde{\varepsilon}_J(x_{n_k})$;*
- *$\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ δ-stabile.*

Lemma 3.10. *Se B è una boundary, allora $\delta_B = \delta$ e $\tilde{\delta}_B = \tilde{\delta}$.*

Teorema 3.11. *Sia X uno spazio di Banach reale e B una boundary. Allora un sottoinsieme limitato e $\sigma(X, B)$-compatto di X non può contenere una ℓ^1-sequence.*

3.2 Il lavoro di Pfitzner

Teorema 3.12 (Pfitzner, 2008). *Siano X uno spazio di Banach e B una boundary. Allora vale l'implicazione*

$$A \subseteq X \text{ limitato e } \sigma(X, B)\text{-compatto} \implies A\ w\text{-compatto.}$$

"Dimostrazione". Sia $A \subseteq X$ limitato e $\sigma(X, B)$-compatto.

Voglio. A w-compatto $\overset{(ES)}{\iff}$ A w-sequenzialmente compatto.

Sia quindi $\{x_n\} \subseteq A$.

Voglio. Sottosuccessione (che chiamo ancora $\{x_n\}$) w-convergente.

WLOG (Lemma 3.9) $\{x_n\}$ sia ε_J-stabile. Dal Teorema 3.11 segue $\tilde{\varepsilon}_J(x_n) = 0$. I legami tra i moduli comparsi nel primo punto del Lemma 3.9 implicano che $\tilde{\delta}(x_n) = 0$, cioè (a meno di passare ad una sottosuccessione δ-stabile) che $\delta(x_n) = 0$, i.e. $\{x_n\}$ è w-Cauchy. $\{x_n\}$ è $\sigma(X, B)$-Cauchy e $\{x_n\} \subseteq A$ $\sigma(X, B)$-compatto $\implies x_n \xrightarrow{\sigma(X,B)} x \in A$. L'uguaglianza di Simons, unita alla $\sigma(X, B)$-convergenza e al fatto che la successione sia w-Cauchy, permette di stabilire anche w-convergenza:

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \limsup x^*(x_n - x) \overset{\text{Simons}}{=} \sup_{b \in B} \limsup b(x_n - x) = 0$$

quindi $x_n \xrightarrow{w} x$. □

A Un piccolo ma utile arsenale di risultati classici

Teorema A.1 (principio di massimo di Bauer, [1]). *Siano X uno spazio lineare topologico localmente convesso, $K \subseteq X$ convesso compatto e $f \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa superiormente semicontinua. Allora f assume il suo massimo su K in qualche elemento di* $\text{ext}K$.

Teorema A.2 (Choquet, [4]). *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e sia $K \subseteq X$ convesso, compatto e <u>metrizzabile</u>. Allora $\forall x \in K\ \exists \mu \in \mathcal{M}^1(K)$ tale che $\text{supp}\mu \subseteq \text{ext}K$ e $x = r(\mu)$.*

Riferimenti bibliografici

[1] C. D. Aliprantis, K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Springer, 1999.

[2] B. Cascales, *On boundaries in Banach spaces*, Spring Conference in Banach Spaces, Paseky – April 2008.

[3] V. P. Fonf, J. Lindenstrauss, R. R. Phelps, *Infinite Dimensional Convexity*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1, North-Holland, 2001.

[4] P. Habala, P. Hajek, V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I* & *II*, Matfyz Press.

[5] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Basic Concepts in the Geometry of Banach Spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1, North-Holland, 2001.

[6] H. Pfitzner, *Boundaries for Banach spaces determine weak compactness*, arXiv/0807.2810, 2008.

[7] J. Spurný, *The boundary problem for L^1-preduals*, Illinois J. Math, to appear in 2009.