Una dimostrazione elementare del teorema di Eberlein-Šmulian

L. Vesely, 2008

Questo testo è un'elaborazione "creativa" dell'articolo

- S. Kremp, *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem and the double limit criterion*, Arch. Math. **47**(1986), 66–69.

Nella sua forma più semplice, il teorema di Eberlein-Šmulian dice che

un sottoinsieme C di uno spazio di Banach è debolmente compatto se e solo se C è debolmente chiuso e ogni successione di elementi di C ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

Presenteremo una dimostrazione di questo teorema, che usa solo nozioni base di Analisi Funzionale.

Alcune nozioni preliminari

In quanto segue, X è uno spazio vettoriale normato, $\emptyset \neq A \subset X$, $\emptyset \neq \subset X^*$. Con $\sigma(X, B)$ intendiamo la topologia su X della convergenza puntuale sull'insieme B; una base degli intorni di 0 in questa topologia è formata dagli insiemi

$$W_{B_0,\varepsilon} = \{x \in X : |b^*(x)| < \varepsilon \ \forall b^* \in B_0\}, \quad \varepsilon > 0,\ B_0 \subset B \text{ finito.}$$

Osserviamo che $\sigma(X, B) = \sigma(X, \operatorname{span} B)$. La topologia $w := \sigma(X, X^*)$ è la topologia debole su X.

Analogamente, $\sigma(X^*, A)$ è la topologia su X^* della convergenza puntuale su A. La topologia $w^* := \sigma(X^*, X)$ è la topologia debole* su X^*.

Ricordiamo che uno *spazio pseudo-metrico* è un insieme su cui è definita una funzione "distanza" che ha tutte le proprietà di metrica tranne la proprietà dell'annullamento. Quindi, in uno spazio pseudo-metrico, anche due punti distinti possono avere distanza zero. Ogni spazio pseudo-metrico definisce in modo naturale una topologia. Il seguente fatto è facilmente dimostrabile.

Fatto 1. *In uno spazio pseudo-metrico, ogni punto della chiusura di un insieme è limite di una successione di elementi dell'insieme.*

Fatto 2. *Se B è numerabile, allora la topologia $\sigma(X, B)$ è pseudo-metrizzabile. Analogamente, se A è numerabile, allora la topologia $\sigma(X^*, A)$ è pseudo-metrizzabile.*

Dimostrazione. Sia $B = (b_n^*)_{n\in\mathbf{N}}$. Lasciamo come un esercizio la dimostrazione del fatto che la funzione

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{-n} \cdot \frac{|b_n^*(x - y)|}{1 + |b_n^*(x - y)|}$$

è una pseudometrica su X e genera la topologia $\sigma(X, B)$. Il caso di $\sigma(X^*, A)$ si dimostra analogamente. ///

Terminiamo con alcune nozioni topologiche.

Definizione 3. Siano T uno spazio topologico, $E \subset T$. L'insieme E è detto:
(a) *[relativamente] numerabilmente compatto* se ogni sottoinsieme infinito numerabile di E ammette un punto di accumulazione in E [in T];
(b) *[relativamente] sequenzialmente compatto* se ogni successione di elementi di E ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento di E [di T].

La proprietà del doppio limite e due lemmi

Ricordiamo che A è un sottoinsieme di uno spazio normato X, e B è un sottoinsieme di X^*.

Definizione 4. Diciamo che vale $\Delta(A,B)$ se per ogni due successioni $(a_j) \subset A$ e $(b_i^*) \subset B$ tali che esistano (in $\overline{\mathbf{R}}$) i limiti $\lim_i \lim_j b_i^*(a_j)$ e $\lim_j \lim_i b_i^*(a_j)$ i due limiti iterati coincidono.

Esempio 5. *Se A è relativamente numerabilmente w-compatto e B è limitato, allora vale $\Delta(A,B)$.*

Dimostrazione. Siano $(a_j) \subset A$, $(b_i^*) \subset B$ due successioni tale che esistano i due limiti iterati della Definizione 3. Siano $a_\infty \in X$ un punto di w-accumulazione di (a_j), e $b_\infty^* \in X^*$ un punto di w^*-accumulazione di (b_i^*). Allora $\lim_i \lim_j b_i^*(a_j) = \lim_i b_i^*(a_\infty) = b_\infty^*(a_\infty)$ e $\lim_j \lim_i b_i^*(a_j) = \lim_j b_\infty^*(a_j) = b_\infty^*(a_\infty)$. ///

Lemma I. *Supponiamo $\Delta(A,B)$. Se una successione $(a_n) \subset A$ converge ad $x \in X$ in $\sigma(X,B)$, allora $a_n \to x$ anche in $\sigma(X,\overline{B}^{w^*})$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme numerabile $A_0 = \{x\} \cup \{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e un qualsiasi $x^* \in \overline{B}^{w^*}$. Siccome $x^* \in \overline{B}^{\sigma(X^*,A_0)}$, Fatto 2 e Fatto 1 implicano che esiste una successione $(b_i^*) \subset B$ che converga a x^* in $\sigma(X^*,A_0)$. Sia $(n_k) \subset \mathbf{N}$ una qualsiasi successione crescente tale che esista (in $\overline{\mathbf{R}}$) $\lim_k x^*(a_{n_k})$. Dalla proprietà $\Delta(A,B)$ si ottiene che

$$\begin{aligned}\lim_k x^*(a_{n_k}) &= \lim_k \lim_i b_i^*(a_{n_k}) \\ &= \lim_i \lim_k b_i^*(a_{n_k}) = \lim_i b_i^*(x) = x^*(x).\end{aligned}$$

Di conseguenza, $\lim_n x^*(a_n) = x^*(x)$. ///

Lemma II. *Se vale $\Delta(A,B)$ e $x \in \overline{A}^{\sigma(X,B)}$, allora esiste una successione $(a_n) \subset A$ convergente a x in $\sigma(X,\overline{B}^{w^*})$.*

Dimostrazione. Costruiamo per induzione a_n $(n \geq 0)$ con $a_n \in A$ per ogni $n \geq 1$. Poniamo $a_0 := x$. Ora, supponiamo di avere gà $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Poniamo $Y_{n-1} = \operatorname{span}\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. L'insieme $B|_{Y_{n-1}}$ (delle restrizioni degli elementi di B al sottospazio Y_{n-1}) è contenuto in Y_{n-1}^*; quindi esiste $(b_k^{(n)})_{k \in \mathbf{N}} \subset B$ tale che $\{b_k^{(n)}|_{Y_{n-1}} : k \in \mathbf{N}\}$ sia denso in $B|_{Y_{n-1}}$. Scegliamo $a_n \in A$ in modo che

$$|b_k^{(l)}(a_n) - b_k^{(l)}(x)| < \tfrac{1}{n} \qquad \text{per ogni } k, l \leq n.$$

Abbiamo quindi una successione $(a_n)_{n\geq 1} \subset A$. Consideriamo l'insieme numerabile

$$B_0 := \{b_k^{(l)} : l, k \in \mathbf{N}\} \subset B$$

e il sottospazio

$$Y := \operatorname{span}\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} = \bigcup_n Y_n.$$

Osservaimo che:

- vale $\Delta(A \cap Y, B_0|_Y)$;
- $B_0|_Y$ è $\sigma(Y^*, Y)$-denso in $B|_Y$;
- $a_n \to x$ in $\sigma(Y, B_0|_Y)$.

Lemma I implica che $a_n \to x$ in $\sigma(Y, B|_Y)$, e quindi anche in $\sigma(X, B)$. Applicando di nuovo Lemma I, otteniamo che la convergenza è anche in $\sigma(X, \overline{B}^{w^*})$. ///

Corollario 6. *Supponiamo $\Delta(A, B_{X^*})$. Allora ogni punto $x^{**} \in \overline{A}^{\sigma(X^{**},X^*)}$ è limite, nella topologia debole $\sigma(X^{**}, X^{***})$, di una successione di elementi di A. Inoltre, se X è uno spazio di Banach, allora $x^{**} \in X$.*

Dimostrazione. Secondo Lemma II (applicato in X^{**}), esiste $(a_n) \subset A$ tale che $a_n \to x^{**}$ in $\sigma(X^{**}, \overline{B_{X^*}}^{\sigma(X^{***},X^{**})}) = \sigma(X^{**}, B_{X^{***}})$. Se X è Banach, allora esso è chiuso in X^{**}. Quindi $x^{**} \in \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|_{X^{**}}}(A) \subset \overline{X}^{\|\cdot\|_{X^{**}}} = X$. ///

Il teorema

TEOREMA. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio di Banach X. Allora sono equivalenti:*
(i) $\overline{A}^w$ è w-compatto;
(ii) $\overline{A}^w$ è numerabilmente w-compatto;
(ii') A è relativamente numerabilmente w-compatto;
(iii) $\overline{A}^w$ è sequenzialmente w-compatto;
(iii') A è relativamente sequenzialmente w-compatto;
(iv) A è limitato e vale $\Delta(A, B_{X^*})$.

Dimostrazione. Le seguenti implicazioni sono ovvie:

$$\begin{array}{ccccc}
(i) & \Rightarrow & (ii) & \Leftarrow & (iii) \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow \\
(iv) & & (ii') & \Leftarrow & (iii')
\end{array}$$

Per dimostrare il teorema, è sufficiente dimostrare le implicazioni $(ii') \Rightarrow (iv)$, $(iv) \Rightarrow (i)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$.

$(ii') \Rightarrow (iv)$. Vale $\Delta(A, B_{X^*})$ secondo Esempio 5. Per dimostrare la limitatezza, è sufficiente dimostrare che ogni $x^* \in X^*$ è limitato superiormente su A (Banach-Steinhaus). Scegliamo una successione $(a_n) \subset A$ tale che $x^*(a_n) \to \sup x^*(A)$. Secondo (ii'), esiste un punto di accumulazione a_∞ di $(a_n)_n$. Necessariamente $x^*(a_n) \to x^*(a_\infty)$, e quindi $\sup x^*(A) = x^*(a_\infty) < +\infty$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Da Corollario 6 si ha $\overline{A}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subset X$. Quindi $(\overline{A}^{\sigma(X^{**},X^*)}, \sigma(X^{**}, X^*)) = (\overline{A}^w, w)$, ma il primo dei due spazi topologici è compatto (Banach-Alaoglu).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Da Esempio 5 segue $\Delta(\overline{A}^w, B_{X^*})$. Sia $(a_n) \subset \overline{A}^w$. Secondo (ii), esiste $a_\infty \subset \overline{A}^w$ punto di w-accumulazione di (a_n). Sia $Y := \text{span}\{a_\infty, a_1, a_2, \ldots\}$. Lo spazio $(B_{Y^*}, \sigma(Y^*, Y)) = (B_{Y^*}, (a_n)_{1 \le n \le \infty})$ è compatto e metrizzabile, e quindi separabile. Sia $B_0 \subset B_{Y^*}$ un insieme numerabile e $\sigma(Y^*, Y)$-denso in B_{Y^*}. Siccome $(\overline{A}^w \cap Y, \sigma(Y, B_0))$ è pseudo-metrizzabile (Fatto 2) e di Hausdorff, esso è metrizzabile. Esiste quindi una sottosuccessione (a_{n_k}) di (a_n) tale che $a_{n_k} \to a_\infty$ in $\sigma(Y, B_0)$. Ora, secondo Lemma I, $a_{n_k} \to a_\infty$ anche in $\sigma(Y, B_{Y^*})$, e quindi anche debolmente in X. ///