Qualche informazione sulle basi di Markušević in spazi di Banach

Stefania D'Alessandro

9 luglio 2012

Indice

1 Una panoramica sulle M-basi

1.1 Definizioni

Definizione 1.1 (M-base)**.** Sia X uno spazio di Banach e Γ un insieme non vuoto.

- Una famiglia $\left\{x_\gamma, x^*_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ di coppie in $X \times X^*$ è detta **sistema biortogonale (b.o.s.)** in $X \times X^*$ se $\langle x_\alpha, x^*_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ per ogni $\alpha, \beta \in \Gamma$.
- Una famiglia $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq X$ è detta **fondamentale** se

$$\overline{\operatorname{span}}^{\|\cdot\|} \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = X.$$

- Un b.o.s. $\left\{x_\gamma, x^*_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ in $X \times X^*$ è detto **totale** se

$$\overline{\operatorname{span}}^{w^*} \left\{x^*_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma} = X^*.$$

- Un b.o.s. $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detto **base di Markuševič** (**M-base**) se è fondamentale e totale.[1]

Esempi e osservazioni 1.2.

- Ogni base di Schauder è una M-base.
- Il sistema trigonometrico in $\mathcal{C}([0,2\pi])$ è una M-base che non è una base di Schauder.
- Un sistema fondamentale non è automaticamente totale: in ogni spazio separabile infinito-dimensionale esiste un sistema fondamentale che non è una M-base.
- Esistono spazi privi di M-base.
  Ad esempio, ℓ^∞ non ammette alcuna M-base (perché uno spazio di Grothendieck dotato di M-base è riflessivo).
- Uno spazio dotato di M-base può contenere sottospazi che ne siano privi.
  Ad esempio, ℓ^∞ è un sottospazio complementato di uno spazio con M-base (dato che ha preduale separabile).
- Può accadere di peggio,[2] infatti esiste uno spazio di Banach Z contenente un sottospazio complementato E tale che E e Z hanno entrambi M-base ma nessuna M-base di E può essere estesa ad una M-base di Z.
- Avere una M-base non è una 3-space property, come dimostra JT^*.

Definizione 1.3 (Proprietà aggiuntive)**.** Sia X uno spazio di Banach e sia $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ una sua M-base.

- $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **λ-norming** ($0<\lambda\le 1$) se
  $$\lambda\|x\| \le \sup_{f\in\overline{\operatorname{span}}^{\|\cdot\|}\left\{x_\gamma^*\right\}\cap B_{X^*}} f(x)$$
  per ogni $x\in X$.
  $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **norming** se è **λ-norming** per qualche $\lambda\in(0,1]$.
- $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **shrinking** se $X^* = \overline{\operatorname{span}}^{\|\cdot\|}\left\{x_\gamma^*\right\}$.

[1] Una M-base può anche venire indicata con $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, stante l'unicità dei funzionali coordinata in un b.o.s. fondamentale.

[2] Assumendo l'assioma $\clubsuit$, [3] pag. 148.

- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **boundedly complete** se, data $\{y_n\} \subseteq \overline{\operatorname{span}}\{x_\gamma\}$ limitata e tale che $a_\gamma := \lim_n x^*_\gamma(y_n)$ esiste per ogni $\gamma \in \Gamma$, allora esiste $y \in \overline{\operatorname{span}}\{x_\gamma\}$ tale che $x^*_\gamma(y) = a_\gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$.
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **base di Auerbach** se $\|x_\gamma\| = \|x^*_\gamma\| = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$.
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **λ-bounded** (per $\lambda \geq 1$) se $\sup_\gamma \left\{\|x_\gamma\|\|x^*_\gamma\|\right\} \leq \lambda$. $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **bounded** se è λ-bounded per qualche $\lambda \geq 1$.
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **strong** se $x \in \overline{\operatorname{span}}\left\{(x, x^*_\gamma)x_\gamma\right\}_\gamma$ per ogni $x \in X$.
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è una **estensione** di una M-base $\{y_\alpha, y^*_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ di un sottospazio $Y \subseteq X$ se $\{y_\alpha\} \subseteq \{x_\gamma\}$.[3]
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **w-compatta** se $\{x_\gamma\}\cup\{0\}$ è un insieme w-compatto.
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **weakly σ-shrinkable** se $\{x_\gamma\} = \bigcup_n G_n$, dove gli insiemi G_n soddisfano: per ogni intorno dell'origine U in (X^{**}, w^*) e per ogni γ, esiste n tale che $x_\gamma \in G_n$ e $G'_n \subseteq U$.[4]
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **countably supports** X^* se $\operatorname{card}\{\gamma : \langle x_\gamma, x^*\rangle \neq 0\} \leq \aleph_0$ per ogni $x^* \in X^*$.
- $\{x_\gamma, x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è detta **countably 1-norming** se

  $$\{f \in X^* : \operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma : f(x_\gamma) \neq 0\} \leq \aleph_0\}$$

  è un sottospazio 1-normante di X^*.

1.2 Risultati fondamentali in ambito separabile...

1.2.1 Esistenza

Teorema 1.4 (Markuševič, 1943). *Sia X uno spazio di Banach separabile. Allora X ammette una M-base. Tale M-base può essere scelta in modo che sia 1-norming.*

Osservazione 1.5. Ogni spazio di Banach separabile contiene una M-base che non sia 1-norming.

Teorema 1.6 (Pełczyński, Pličko, 1976–77). *Sia X uno spazio di Banach separabile. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, X ammette una M-base $(1+\varepsilon)$-bounded.*

[3] Poiché $\{y_\alpha\}$ è densa in Y, se $y_\alpha = x_\gamma \in X$, allora f_γ è una estensione di g_α da Y a X.
[4] G'_n denota l'insieme dei punti di w^*-accumulazione in X^{**}.

Osservazione 1.7. Ogni spazio di Banach separabile ammette una M-base unbounded.

Teorema 1.8 (Terenzi, 1994)**.** *Sia X uno spazio di Banach separabile. Allora X ammette una M-base strong. Tale M-base può essere scelta in modo che sia norming.*

Osservazione 1.9. Ogni spazio di Banach separabile ammette una M-base che non sia strong (e dunque neppure base di Schauder).

Teorema 1.10. *Sia X uno spazio di Banach tale che X^* sia separabile. Allora X ammette una M-base shrinking.*
Di più, X ammette una M-base strong i cui funzionali coordinata formino una M-base strong nel duale.

Osservazione 1.11. In questo caso, non è possibile trovare una M-base che non sia shrinking in ogni spazio di Banach separabile. Basti pensare ad uno spazio riflessivo e separabile.

Osservazione 1.12. L'esistenza di basi di Auerbach in ogni spazio di Banach separabile è un problema aperto. Tuttavia, per ogni spazio di Banach separabile X e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una norma $|||\cdot|||$ equivalente a $\|\cdot\|$ tale che $\|x\| \leq |||x||| \leq (1+2\varepsilon)\|x\|$ per ogni $x \in X$ e $(X, |||\cdot|||)$ abbia una base di Auerbach.

1.2.2 Estensione

Teorema 1.13 (Gurarii, Kadec, 1962)**.** *Sia X uno spazio di Banach separabile e sia Z un suo sottospazio chiuso. Allora ogni M-base di Z può essere estesa ad una M-base di X.*

Definizione 1.14. Siano Z e Y due sottospazi chiusi di uno spazio di Banach X. Si dice che Y e Z sono **quasicomplementati** se $Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z$ è denso in X.

Teorema 1.15 (Milman)**.** *Siano Z e Y due sottospazi complementati di uno spazio di Banach separabile X e sia $\{y_n\}$ una M-base di Y. Allora esiste $\{z_n\} \subseteq Z$ tale che $\{y_n\} \cup \{z_n\}$ sia una M-base di X.*

1.3 ...e non (necessariamente) separabile – le $\mathcal{P}$-class

Definizione 1.16. Sia X uno spazio di Banach e sia μ il più piccolo ordinale tale che $\mu = \text{dens}X$. Una **projectional resolution of the identity** (**PRI**) su X è una famiglia $\{P_\alpha\}_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu}$ di proiezioni su X tale che, per ogni α con $\omega_0 \leq \alpha \leq \mu$, valgano:

(*i*) $\|P_\alpha\| = 1$;

(*ii*) $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_{\min\{\alpha,\beta\}}$;

(*iii*) $\mathrm{dens} P_\alpha X \leq |\alpha|$;

(*iv*) $\cup_{\beta<\alpha} P_{\beta+1}X$ è $\|\cdot\|$-denso in $P_\alpha X$;

(*v*) $P_\mu = I_X$.

Conseguenze 1.17.

(*i*) per ogni $x \in X$, $\alpha \mapsto P_\alpha x$ è continua;

(*ii*) per ogni $x \in X$ e $\alpha \in [\omega_0, \mu]$,

$$P_\alpha x \in \overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|} \left\{(P_{\beta+1} - P_\beta)x\right\}_{\beta<\alpha} \cup \{P_{\omega_0}x\}.$$

Esempio 1.18. Sia $P_\alpha \colon \mathcal{C}[0,\omega_1] \longrightarrow \mathcal{C}[0,\omega_1]$ definita da

$$P_\alpha f(\beta) = \begin{cases} f(\beta) & \beta \leq \alpha \\ f(\alpha) & \beta > \alpha \end{cases}.$$

$\{P_\alpha\}_{\omega_0\leq\alpha\leq\omega_1}$ è una PRI su $\mathcal{C}[0,\omega_1]$.

Ulteriori esempi di circostanze in cui esiste una PRI seguiranno dai risultati seguenti.

Definizione 1.19. Sia X uno spazio di Banach e sia $W \subseteq X^*$ un sottospazio $\mathbb{Q}$-lineare 1-norming. Sia $\Phi\colon W \longrightarrow 2^X$ a valori al più numerabili tale che, per ogni $\emptyset \neq B \subseteq W$ con chiusura lineare, si abbia $\Phi(B)^\perp \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$.
La coppia (W, Φ) è chiamata **projectional generator** (**PG**) su X.
Un projectional generator è detto **full** se $W = X^*$.

Definizione 1.20. Uno spazio di Banach X ha la **separable complementation property** se ogni sottospazio separabile di X è contenuto in un sottospazio separabile e complementato Z di X.
X ha la 1-**SCP** se, per ogni Z come sopra, la proiezione $P\colon X \longrightarrow Z$ ha norma 1.

Definizione 1.21. Sia X uno spazio di Banach dotato di una PRI $\{P_\alpha\}_{\omega_0\leq\alpha\leq\mu}$. $G \subseteq X$ è **subordinato** alla PRI se $P_\alpha x \in \{0, x\}$ per ogni $\omega_0 \leq \alpha \leq \mu$ e $x \in G$.

Teorema 1.22. *Sia X uno spazio di Banach e sia μ il più piccolo ordinale tale che $\mu = \mathrm{dens}X$. Se X ha un PG (W, Φ), allora X ha la 1-SCP e ammette una PRI.*
Inoltre, se $G \subseteq X$ countably supports W, si può assumere che G sia subordinato alla PRI.

Esempio 1.23. Sia X uno spazio di Banach WCG e sia K l'insieme w-compatto e strettamente convesso che genera X. X ammette un full PG (X^*, Φ) tale che $\Phi(x^*) \in K$ per ogni $x^* \in X^*$. Dato $x^* \in X^*$, $\Phi(x^*) \in K$ è definito come

$$\langle \Phi(x^*), x^* \rangle = \sup \langle K, x^* \rangle.$$

Quindi X ammette una PRI tale che $P_\alpha K \subseteq K$ per ogni α.

Altri esempi di spazi dotati di un PG saranno presentati nella prossima sezione.

Definizione 1.24. Una classe $\mathcal{C}$ di spazi di Banach è detta **$\mathcal{P}$-class** se, per ogni $X \in \mathcal{C}$, esiste una PRI $\{P_\alpha\}_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu}$ tale che $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)X \in \mathcal{C}$ per ogni $\alpha < \mu$, dove μ è il primo ordinale con cardinalità $\text{dens}X$.

Teorema 1.25. *Sia $\mathcal{C}$ una $\mathcal{P}$-class di spazi di Banach. Allora ogni $X \in \mathcal{C}$ ammette una M-base.*

Dimostrazione. Si procede per induzione transfinita su $\text{dens}\, X$. Per spazi separabili, l'asserto è vero. Si assuma ora che il risultato valga ora per tutti gli spazi con densità minore di $\mu := \text{dens}X$. Sia $\{P_\alpha\}_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu}$ una PRI di X. Sia $\{x_\gamma^\alpha, f_\gamma^\alpha\}_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \subseteq (P_{\alpha+1} - P_\alpha)X \times ((P_{\alpha+1} - P_\alpha)X)^*$ una M-base. Allora,

$$\left\{x_\gamma^\alpha, \left(P_{\alpha+1}^* - P_\alpha^*\right) f_\gamma^\alpha\right\}_{\gamma \in \Gamma_\alpha, \omega_0 \leq \alpha < \mu}$$

risulta essere una M-base per X. □

Osservazione 1.26. L'induzione funziona anche per dedurre l'esistenza di una M-base strong.

Osservazione 1.27. In generale l'esistenza della PRI non è sufficiente a garantire la tesi. Lo è in casi particolari, p.e. qualora $\text{dens}X = \omega_1$.

2 Applicazioni a (alcuni) spazi non-separabili

2.1 Definizioni e proprietà

Definizione 2.1. Sia X uno spazio di Banach.

- X è detto **weakly compactly generated** (**WCG**) se esiste un w-compatto $K \subseteq X$ tale che $X = \overline{\text{span}}^{\|\cdot\|} K$.
- X è detto **weakly countably determined** (**WCD**) se esiste una famiglia numerabile $\{K_n\}_n$ di w^*-compatti in X^{**} tale che, per ogni $x \in X$ e $u \in X^{**} \backslash X$, esiste n_0 tale che $x \in K_{n_0}$ e $u \notin K_{n_0}$.
- X è detto **weakly Lindelöf determined** (**WLD**) se (B_{X^*}, w^*) è un compatto di Corson.[5]

[5] i.e. se è omeomorfo ad un compatto $C \subseteq [-1,1]^\Gamma$, per qualche Γ, tale che ogni $c \in C$ ha supporto numerabile.

- X è uno **spazio di Pličko** se X^* ha un Σ-sottospazio[6] 1-norming.
- X è detto **reflexive generated** se esiste uno spazio riflessivo R e un operatore lineare e limitato $T\colon R \longrightarrow X$ tale che $T(R)$ sia denso in X.
- X è detto **Hilbert generated** se esiste uno spazio di Hilbert H e un operatore lineare e limitato $T\colon H \longrightarrow X$ tale che $T(H)$ sia denso in X.

Osservazione 2.2. Valgono le seguenti implicazioni:

$$\text{WCG} \Rightarrow \text{WCD} \Rightarrow \text{WLD} \Rightarrow \text{Pličko}.$$

Non vale alcun viceversa.

Teorema 2.3. *Sia X uno spazio di Banach. Allora X è WLD se e solo se X ammette un full PG.*

Conseguenza 2.4. Le classi di spazi WCG, WCD e WLD sono $\mathcal{P}$-class.[7]

Osservazione 2.5. In realtà anche le classi di spazi di Pličko e di duali di spazi di Asplund sono $\mathcal{P}$-class.

Conseguenza 2.6. Spazi WCG, WCD, WLD, di Pličko e duali di Asplund ammettono una M-base.

2.2 Caratterizzazioni strutturali attraverso le M-basi

Dato uno spazio di Banach X, la sua appartenenza ad una delle classi appena introdotte può essere caratterizzata attraverso alcune proprietà di una sua M-base (che sappiamo esistere).

Teorema 2.7. *Sia X uno spazio di Banach. Allora:*

(1) *X è riflessivo $\Leftrightarrow$ esiste una M-base shrinking e boundedly complete;*[8]

(2) *X è WCG $\Leftrightarrow$ X è reflexive generated $\Leftrightarrow$ esiste una M-base w-compatta;*

(3) *X è WCD $\Leftrightarrow$ esiste una M-base weakly σ-shrinkable;*

(4) *X è WLD $\Leftrightarrow$ esiste una M-base che countably supports X^*;*

(5) *X è WCG e Asplund $\Leftrightarrow$ X è WLD e Asplund $\Leftrightarrow$ esiste una M-base shrinking;*

[6]i.e. un sottospazio $W \subseteq X^*$ tale che esista $T\colon X^* \longrightarrow \mathbb{R}^\gamma$ lineare, 1-1 e w^*-continua tale che $T(W) \subseteq \Sigma(\Gamma)$.

[7]Perché WCD e WLD sono proprietà ereditate dai sottospazi; WCG non lo è, ma si comporta bene con le proiezioni.

[8]Questo risultato è analogo al classico risultato di James per spazi di Banach dotati di base di Schauder, la cui riflessività viene caratterizzata dal fatto che la base sia shrinking e boundedly complete.

(6) *X è di Pličko $\Leftrightarrow$ esiste una M-base countably* 1*-norming;*

(7) *X è Hilbert generated $\Leftrightarrow$ esistono una M-base $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ e un operatore lineare limitato $T\colon \ell^2(\Gamma) \longrightarrow X$ tale che $x_\gamma = Te_\gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, dove $\{e_\gamma\}$ è la base canonica di ℓ^2.*

Alcune dimostrazioni.

(1) ($\Rightarrow$) Poiché X è riflessivo, X è WCG e dunque ammette M-base $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$.
Allora

$$X^* = \overline{\operatorname{span}}^{w^*} \left\{x_\gamma^*\right\} \overset{\text{rifl.}}{=} \overline{\operatorname{span}}^{w} \left\{x_\gamma^*\right\} = \overline{\operatorname{span}}^{\|\cdot\|} \left\{x_\gamma^*\right\}$$

quindi $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ è shrinking.
Sia ora $(y_i) \subseteq X$ limitata t.c. esista $a_\gamma := \lim_i x_\gamma^*(y_i)$ per ogni γ.
Voglio: $\exists y \in X$: $x_\gamma^*(y) = a_\gamma$ per ogni γ.
Per la riflessività esiste una sottosuccessione $(y_{i_j})_j$ di $(y_i)_i$ w-convergente a $y \in X$, dunque

$$x_\gamma^*(y) = \lim_j x_\gamma^*(y_{i_j}) = a_\gamma \quad \forall\gamma$$

quindi $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ è boundedly complete.

($\Leftarrow$) Sia $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ una M-base shrinking e boundedly complete.
Voglio: w-sequenziale compattezza in B_X.
Sia $(y_n) \subseteq B_X$. Per ogni $x \in X$ esiste $\Gamma_x \subseteq \Gamma$ numerabile tale che $x_\gamma^*(x) = 0$ per ogni $\gamma \notin \Gamma_x$.[9]

Claim. $\exists(n_i)$ tale che $\exists a_\gamma = \lim_i x_\gamma^*(y_{n_i})$ per ogni $\gamma \in \cup_n\Gamma_n$.

Ordino in una successione (γ_n) gli elementi di $\cup_n\Gamma_n$.
$\{x_{\gamma_1}^*(y_n)\}$ è limitata in $\mathbb{R}$, dunque è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{\gamma_1}^*(y_{n_i^1})\}$ convergente ad a_1.
$\{x_{\gamma_2}^*(y_{n_i^1})\}$ è limitata in $\mathbb{R}$, dunque è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{\gamma_2}^*(y_{n_i^2})\}$ convergente ad a_2.
Si proceda induttivamente in questo modo e si ponga $n_i = n_i^i$, ottenendo $\lim_i x_{\gamma_k}^*(y_{n_i}) = a_{\gamma_k}$ per ogni k.
Se $k \notin \cup_n\Gamma_n$, allora $x_\gamma^*(y_n) = 0$ per ogni n, dunque $a_\gamma = 0$ per ogni γ. Dato che la M-base è boundedly complete, esiste $y \in X$ tale che

$$f_\gamma(y) = a_\gamma = \lim_i f_\gamma(y_{n_i})$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$. Dato che la M-base è shrinking, si ha $y_{n_i} \xrightarrow{w} y$.
Per Eberlein-Šmulyan, B_X è w-compatta e dunque X riflessivo.

[9] Ciò segue dalla definizione di M-base.

(2) ($\Rightarrow$) Sia K strettamente convesso tale che $\overline{\text{span}}K = X$ e sia $\left\{x_\gamma, x^*_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ una M-base di X.

Fatto. $\{x_\gamma\}$ può essere scelta con $x_\gamma \in K$ per ogni γ.

Da ciò segue la w-compattezza di $\{x_\gamma\}\cup\{0\}$, infatti, se $\{x_\gamma\} \subseteq K$, allora esiste una subnet $\{y_{\beta(\gamma)}\}$ w-convergente, dunque $f_\gamma(x_beta)$ converge per ogni γ, perciò necessariamente $x_\beta \xrightarrow{w} 0$.

Verifica del fatto: induzione su $\operatorname{dens} X$. Se X è separabile, la tesi è facilmente verificata normalizzando la M-base (ed utilizzando il lemma su cui si basa la dimostrazione del teorema di Markušević, v. [3]). Si supponga ora che il risultato valga per ogni spazio di Banach WCG Y con $\operatorname{dens} Y < \mu$, dove μ è un cardinale non-numerabile. Sia ora X uno spazio di Banach WCG con carattere di densità μ e sia $\{P_\alpha\}_{\omega_0\leq\alpha\leq\mu}$ la sua PRI con $P_\alpha K \subseteq K$ per ogni α. Per ogni α tale che $\omega_0 \leq \alpha < \mu$ esiste una M-base $\{x^\alpha_\gamma, f^\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_\alpha}$ in $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)X \times ((P_{\alpha+1} - P_\alpha)X)^*$; per ipotesi induttiva, $\{x^\alpha_\gamma\}_\gamma$ può essere trovata in $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)K \subseteq 2K$, dunque $\{\frac{1}{2}x^\alpha_\gamma\} \subseteq K$. La M-base globale si costruisce come nel teorema 1.25. $\square$

($\Leftarrow$) ovvio.

(4) ($\Rightarrow$) Sia $\left\{x_\gamma, x^*_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ la M-base di X. (B_{X^*}, w^*) è un compatto di Corson, dunque ha w^*-countable tightness, i.e. per ogni $A \subseteq B_{X^*}$ e per ogni $x^* \in \overline{A}^{w^*}$, esiste $S \subseteq A$ numerabile tale che $x^* \in \overline{S}^{w^*}$. Sia ora

$$S := \{x^* \in X^* : \operatorname{card}\{\gamma : x^*(x_\gamma) \neq 0\} \leq \aleph_0\}\,.$$

Si ha $\{x^*_\gamma\} \subseteq S \subseteq X^*$. Dalla w^*-countable tightness e dal teorema di Banach-Dieudonné, si deduce la w^*-chiusura di S, dunque

$$X^* = \overline{\text{span}}^{w^*}\left\{x^*_\gamma\right\} \subseteq S \subseteq X^*$$

da cui $X^* = S$.

($\Leftarrow$) Sia $T\colon (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow (\mathbb{R}^\gamma, \tau_p)$ tale che $x^* \mapsto (x^*(x_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$. T è 1-1, continua e dunque omeomorfismo sull'immagine (il primo spazio è compatto e il secondo di Hausdorff). (B_{X^*}, w^*) è quindi un compatto di Corson e X uno spazio WLD.

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] R. Deville, G. Godefroy e V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Longman Scientific & Technical, 1993.

[2] P. Habala, P. Hájek e V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I* & *II*, Matfyz Press, 1996.

[3] P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Vanderwerff e V. Zizler, *Biorthogonal Systems in Banach Spaces*, Springer, 2008.