Una dimostrazione elementare del teorema di Lebesgue sulla differenziazione di funzioni monotone

L. V., 2018

Uno dei risultati più importanti in Analisi Matematica è il teorema di Lebesgue sulla *derivabilità quasi ovunque di ogni funzione monotona* (di una variabile reale, a valori reali). Il teorema non può essere considerato elementare, in quanto la sua dimostrazione di solito richiede l'uso della teoria della misura, insieme al Teorema di ricoprimenti di Vitali o il Lemma del Sole che sorge (Rising Sun Lemma) di Riesz. La sua dimostrazione viene quindi spesso omessa, nei corsi di Analisi Reale.

Lo scopo di questo testo è presentare una dimostrazione (di M.W. Botsko) relativamente elementare del teorema di Lebesgue, che non utilizza teoria della misura (ma solo la nozione elementare di insiemi di misura nulla) né i ricoprimenti di Vitali (ma un elementare lemma di ricoprimento basato sulla compattezza). La dimostrazione (da me leggeermente adattata) è stata pubblicata nell'articolo

M.W. Botsko, *An elementary proof of Lebesgue's differentiation theorem*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), 834–838.

1. Notazioni

Siano $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $x \in (a,b)$. Definiamo la *derivata superiore* e la *derivata inferiore* di f in x come

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} := \inf_{\delta>0} \sup_{\substack{y\in(a,b)\\ 0<|y-x|<\delta}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ ;$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} := \sup_{\delta>0} \inf_{\substack{y\in(a,b)\\ 0<|y-x|<\delta}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ .$$

Esercizio 1.1. Dimostrare che $\overline{D}f(x) = \alpha$ $(\in \overline{\mathbb{R}})$ se e solo se:
(a) se $\{y_n\} \in (a,b) \setminus \{x\}$, $y_n \to x$ allora $\limsup_n \frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x} \le \alpha$, e
(b) esiste una successione $\{z_n\} \in (a,b) \setminus \{x\}$ tale che $z_n \to x$ e $\frac{f(z_n)-f(x)}{z_n-x} \to \alpha$;
ovvero $\alpha = \sup\left\{\limsup_n \frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}\right\}$ dove il "sup" è preso rispetto a tutte le successioni in $(a,b) \setminus \{x\}$ convergenti a x (ed è, in realtà un "max").

Dato un intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$, denotiamo con $|I|$ la sua lunghezza, cioè, se $-\infty < c := \inf I < d := \sup I < +\infty$ allora $|I| = d - c$.

2. Insiemi di misura nulla e un lemma elementare su ricoprimenti

Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ viene detto *di misura nulla* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile di intervalli aperti $\{I_n\}$ tale che

$$E \subset \bigcup_n I_n \quad \text{e} \quad \sum_n |I_n| < \varepsilon\,.$$

Data una proprità $\mathcal{P}$ di punti in $\mathbb{R}$, diciamo che *la $\mathcal{P}$ vale quasi ovunque* se l'insieme dei punti che non la soddisfano è di misura nulla.

Fatto 2.1. *I seguenti fatti seguono facilmente dalla definizione.*

(a) Nella definizione di un insieme di misura nulla, è possibile omettere la richiesta che gli intervalli siano aperti.
(b) Sottoinsiemi di misura nulla sono di misura nulla.
(c) Ogni insieme al più numerabile è di misura nulla.
(d) Unione di una famiglia al più numerabile di insiemi di misura nulla è anch'essa un insieme di misura nulla.

Per semplicità, diremo che una famiglia $\mathcal{B}$ di insiemi è *disgiunta* se i suoi elementi sono a due a due disgiunti. In quanto segue, supponiamo sempre che $-\infty < a < b < +\infty$.

Lemma 2.2 (Lemma di ricoprimento)**.** *Se un insieme $E \subset (a, b)$ non è di misura nulla, allora esiste $\alpha > 0$ tale che:*

$(*)$ ogni ricoprimento $\mathcal{B}$ di E con sottointervalli aperti di (a, b) ammette una sottofamiglia finita disgiunta $\mathcal{B}_0$ tale che

$$\sum_{I \in \mathcal{B}_0} |I| > \alpha.$$

Dimostrazione. Essendo E non di misura nulla, esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni ricoprimento al più numerabile $\mathcal{A}$ di E con intervalli aperti limitati si ha che

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} |I| \geq \bar{\varepsilon}\,. \tag{1}$$

L'insieme $A = \bigcup_{I \in \mathcal{B}} I$ è un insieme aperto (contenuto in (a, b)), e quindi rappresentabile come un'unione digiunta al più numerabile

$$A = \bigcup_n (c_n, d_n).$$

(Gli intervalli (c_n, d_n) sono le componenti connesse di A.) Di conseguenza,

$$\sum_n (d_n - c_n) \geq \bar{\varepsilon}\,.$$

Fissiamo un indice n. Scegliamo un intervallo compatto $K \subset (c_n, d_n)$ tale che $|K| \geq \frac{1}{2}(d_n - c_n)$. Ogni punto $x \in K$ è contenuto in qualche $I_x \in \mathcal{B}$, che necessariamente soddisfa $I_x \subset (c_n, d_n)$. Per la compattezza di K, esiste una sottofamiglia finita $\{I_1, \ldots, I_m\} \subset \mathcal{B}$ tale che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} I_j \subset (c_n, d_n).$$

Possiamo inoltre supporre che essa sia un ricoprimento minimale di K (cioè, nessuna sua sottofamiglia propria è un ricoprimento). In tal caso, per ogni $1 \leq j \leq m$ esiste

$$x_j \in I_j \setminus \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq j}} I_i \, .$$

Possiamo senz'altro supporre che gli intervalli siano numerati in modo che $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. È facile vedere che, ora, ciascuna delle due famiglie

$$\{I_j : \ 1 \leq j \leq m, \ j \text{ pari}\} \quad \text{e} \quad \{I_j : \ 1 \leq j \leq m, \ j \text{ dispari}\} \tag{2}$$

è necessariamente disgiunta. Inoltre, una delle relative due sommatorie

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \text{ pari}}} |I_j| \qquad \text{e} \qquad \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \text{ dispari}}} |I_j|$$

deve essere $\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} |I_j|$. Denotiamo quindi con $\mathcal{A}_n$ quella delle famiglie (2) che corrisponde a tale somma. Con questa notazione,

$$\sum_{I \in \mathcal{A}_n} |I| \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} |I_j| \geq \frac{1}{2} |K| \geq \frac{1}{4} (d_n - c_n).$$

Avendo fatto ciò per ogni n, possiamo definire la famiglia

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n} \mathcal{A}_n$$

e osservare che essa è una sottofamiglia disgiunta (e, ovviamente, al più numerabile) di $\mathcal{B}$. Abbiamo

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} |I| = \sum_{n} \sum_{I \in \mathcal{A}_n} |I| \geq \frac{1}{4} \sum_{n} (d_n - c_n) \geq \frac{\bar{\varepsilon}}{4} > \frac{\bar{\varepsilon}}{5} \, .$$

Esiste quindi una sottofamiglia finita $\mathcal{B}_0$ di $\mathcal{A}$ tale che $\sum_{I \in \mathcal{B}_0} |I| > \frac{\bar{\varepsilon}}{5}$. Abbiamo mostrato che $\alpha := \frac{\bar{\varepsilon}}{5}$ ha la proprietà richiesta. $\square$

Lemma 2.3 (Lemma di ricoprimento – bis)**.** *Se un insieme $E \subset (a, b)$ non è di misura nulla, allora esiste $\beta > 0$ tale che:*

(∗) *per ogni insieme di misura nulla* $P \subset (a,b)$ *e per ogni ricoprimento* $\mathcal{B}$ *di* $E \setminus P$ *con sottointervalli aperti di* (a,b) *esiste una sottofamiglia finita disgiunta* $\mathcal{B}_0$ *tale che*

$$\sum_{I \in \mathcal{B}_0} |I| > \beta.$$

(Si noti che β non dipende da P!)

Dimostrazione. Per il Fatto 2.1(b), possiamo supporre che $P \subset E$. Sia $\alpha > 0$ come nel Lemma 2.2. Sia $\mathcal{B}$ un ricoprimento al più numerabile di $E \setminus P$ con intervalli aperti limitati. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento al più numerabile di P con intervalli aperti limitati tale che $\sum_{I \in \mathcal{A}} |I| < \frac{\alpha}{2}$. Siccome $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è un ricoprimento di E, esiste una sua sottofamiglia finita disgiunta $\mathcal{C}$ tale che $\sum_{I \in \mathcal{C}} |I| > \alpha$. Poniamo $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ e $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ e osserviamo che

$$\alpha < \sum_{I \in \mathcal{C}} |I| \le \sum_{I \in \mathcal{A}_0} |I| + \sum_{I \in \mathcal{B}_0} |I| < \frac{\alpha}{2} + \sum_{I \in \mathcal{B}_0} |I|\,,$$

da cui $\sum_{I \in \mathcal{B}_0} |I| > \frac{\alpha}{2} =: \beta$.

□

Ricordiamo infine la nozione della variazione. Una *partizione di* $[a,b]$ è un insieme finito $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b]$ tale che $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, denotiamo

$$V(f;P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|\,,$$

e definiamo la *variazione (totale)* di f su $[a,b]$ come

$$\mathrm{Var}(f;[a,b]) = \sup_P V(f;P)$$

dove il “sup” viene preso rispetto a tutte le partizioni di $[a,b]$. I seguenti fatti sono ben noti e facili da dimostrare.

Fatto 2.4.

(a) Se f *è monotona allora* $\mathrm{Var}(f;[a,b]) = |f(b) - f(a)|$ *(e in particolare* $\mathrm{Var}(f;[a,b]) < +\infty$*).*

(b) $\mathrm{Var}(f+g;[a,b]) \le \mathrm{Var}(f;[a,b]) + \mathrm{Var}(g;[a,b])$.

3. Dimostrazione del teorema di Lebesgue

Iniziamo con un semplice lemma.

Lemma 3.1. *Siano $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$, $A > 0$ e S un sottoinsieme non vuoto di $\{0, 1, \dots, n\}$. Supponiamo che valga una delle seguenti due condizioni:*
(a) $f(a) \le f(b)$ e $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} < -A$ per ogni $k \in S$; oppure
(b) $f(a) \ge f(b)$ e $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} > A$ per ogni $k \in S$.
Allora

$$V(f;P) > |f(b) - f(a)| + AL \quad \textit{dove} \quad L = \sum_{k \in S} (x_k - x_{k-1}).$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo il caso (a); il caso (b) segue da (a) considerando la funzione $-f$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\ &= \sum_{k \in S} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) + \sum_{k \notin S} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\ &< -AL + \sum_{k \notin S} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \le -AL + V(f;P). \end{aligned}$$

□

La seguente osservazione è un facile esercizio per il lettore.

Osservazione 3.2. *Siano $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se f è continua in x e $\overline{D}f(x) > \alpha$, allora per ogni $\eta > 0$ esistono $u, v \in (a,b)$ tali che*

$$u < x < v, \quad v - u < \eta \quad \textit{e} \quad \frac{f(v) - f(u)}{v - u} > \alpha.$$

E un'analoga proprietà si ha quando $\underline{D}f(x) < \alpha$.

Ora siamo pronti per la dimostrazione del Teorema di Lebesgue.

Teorema 3.3. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente. Allora f è derivabile quasi ovunque in (a,b).*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che f ammette derivata (finita o infinita) quasi ovunque. Siccome f è continua a meno di un insieme al più numerabile, è sufficiente dimostrare che l'insieme

$$F = \{x \in (a,b) : \ f \text{ è continua in } x \text{ e } \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}$$

ha misura nulla. Notiamo che $F = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} E_{r,s}$ dove

$$E_{r,s} = \{x \in (a,b) :\ f \text{ è continua in } x \text{ e } \overline{D}f(x) > r > s > \underline{D}f(x)\}.$$

Per dimostrare che questi insiemi hanno misura nulla, procediamo per assurdo.

Fissiamo $r, s \in \mathbb{Q}$ tali che $r > s$, e denotiamo $E := E_{r,s}$. Supponiamo che E non sia di misura nulla. Sia $\beta > 0$ come nel Lemma 2.3 (Lemma di ricoprimento–bis). Denotando

$$A = \frac{r-s}{2}\,, \quad B = \frac{r+s}{2}\,, \quad g(x) = f(x) - Bx\,,$$

abbiamo che

$$(3) \qquad E = \{x \in (a,b) :\ g \text{ è continua in } x,\ \overline{D}f(x) > A,\ \underline{D}f(x) < -A\}.$$

Poniamo inoltre $T = \mathrm{Var}(g; [a,b])$. (Si noti che $T < +\infty$ per Lemma 2.4). Sia $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$ tale che

$$V(g; P) > T - A\beta.$$

Per ogni punto $x \in E \setminus P$ esiste un unico $k \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x \in E \cap (x_{k-1}, x_k)$. Possiamo quindi applicare (3) e Osservazione 3.2 come segue.

- Se $g(x_{k-1}) \le g(x_k)$, esistono $a_x < b_x$ in (x_{k-1}, x_k) tali che $x \in (a_x, b_x)$ e $\frac{g(b_x)-g(a_x)}{b_x-a_x} < -A$.
- Se $g(x_{k-1}) > g(x_k)$, esistono $a_x < b_x$ in (x_{k-1}, x_k) tali che $x \in (a_x, b_x)$ e $\frac{g(b_x)-g(a_x)}{b_x-a_x} > A$.

La famiglia $\mathcal{B} = \{(a_x, b_x) : x \in E \setminus P\}$ è una copertura di $E \setminus P$, e quindi esiste una sua sottofamiglia finita disgiunta $\mathcal{B}_0$ tale che $\sum_{I\in\mathcal{B}_0} |I| > \beta$.

Sia ora $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$ la partizione di $[a,b]$ ottenuta aggiungendo alla P gli estremi degli elementi di $\mathcal{B}_0$.

Sia $[x_{k-1}, x_k]$ tale che contenga almeno un elemento di $\mathcal{B}_0$. Dal Lemma 3.1 abbiamo che

$$\sum_{[y_{i-1},y_i]\subset[x_{k-1},x_k]} |g(y_i) - g(y_{i-1})| > |g(x_k) - g(x_{k-1})| + A \sum_{\substack{I\in\mathcal{B}_0 \\ I\subset[x_{k-1},x_k]}} |I|\,.$$

Sommando rispetto a $1 \le k \le n$, otteniamo

$$T \ge \sum_{i=1}^{q} |g(y_i) - g(y_{i-1})| > V(g; P) + A\beta > T - A\beta + A\beta = T.$$

Questa contraddizione dimostra che f ammette derivata (finita o infinita) quasi ovunque.

Rimane da dimostrare che effettivamente f è derivabile quasi ovunque. A questo proposito, procediamo di nuovo per assurdo, supponendo che l'insieme

$$H = \{x \in (a,b) :\ f \text{ è continua in } x,\ \underline{D}f(x) = +\infty\}$$

non sia di misura nulla. Sia $\alpha > 0$ come in Lemma 2.2 applicato con $E = H$. Fissiamo un qualsiasi $M > 0$. Per Osservazione 3.2, per ogni $x \in H$ esistono punti $a_x < b_x$ in (a, b) tali che

$$x \in (a_x, b_x) \quad \text{e} \quad \frac{f(b_x) - f(a_x)}{b_x - a_x} > M.$$

La copertura $\mathcal{B} = \{(a_x, b_x) : x \in H\}$ ammette una sottofamiglia finita disgiunta $\mathcal{B}_0$ con $\sum_{I \in \mathcal{B}_0} |I| > \alpha$. Per ogni $I \in \mathcal{B}_0$, denotiamo $\alpha_I = \inf I$ e $\beta_I = \sup I$, e osserviamo che, usando la monotonia di f,

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{I \in \mathcal{B}_0} |f(\beta_I) - f(\alpha_I)| > M\alpha.$$

E questa contraddizione (con l'arbitrarietà di $M > 0$) conclude la dimostrazione. □

4. Appendice. Qualche semplice conseguenza del teorema di Lebesgue

A differenza delle sezioni precedenti, quest'appendice utilizzerà diversi teoremi della Teoria della misura.

Prima del seguente teorema, osserviamo che ogni funzione monotona (definita su un intervallo) è misurabile.

Teorema 4.1. *Sia f una funzione monotona non decrescente su $[a, b]$. Allora $f' \in L^1(a, b)$ e*

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leq f(b) - f(a). \tag{4}$$

Dimostrazione. Dal Teorema 3.3 sappiamo che $f'(x)$ esiste finita quasi ovunque in (a, b). Per semplicità, estendiamo f a $[a, +\infty)$ ponendo $f(x) = f(a)$ per ogni $x > a$. Ora, per ogni punto $x \in (a, b)$ di derivabilità, abbiamo

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$$

dove $g_n(x) = n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$. Di conseguenza, la funzione (definita quasi ovunque) f' è non negativa e misurabile. Esiste quindi (finito o infinito) il suo integrale di Legesgue. Per il Lemma di Fatou,

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\,dx &\le \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b \left[f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right]\,dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} n \left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\right] \le f(b) - f(a),\end{aligned}$$

perché il primo integrale vale $\frac{1}{n}f(b)$ e il secondo è maggiore o uguale a $\frac{1}{n}f(a)$. Quindi $\|f'\|_1 \le f(b) - f(a) < +\infty$. □

Dimostreremo ora una generalizzazione del Teorema 4.1 per le funzioni a variazione limitata. Iniziamo con il seguente facile esercizio.

Fatto 4.2. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ha variazione limitata e definiamo*

$$v(x) = \mathrm{Var}(f;[a,x])\,, \quad x \in [a,b],$$

allora le seguenti funzioni sono monotone non decrescenti:

$$v\,, \quad \pm f + v\,.$$

Teorema 4.3. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Allora f è derivabile quasi ovunque in (a,b), la sua derivata f' appartiene a $L^1(a,b)$ e soddisfa*

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \le \mathrm{Var}(f;[a,b]). \tag{5}$$

Dimostrazione. La funzione $f = (f+v) - v$ è derivabile quasi ovunque con $f' \in L^1(a,b)$, in quanto differenza di funzioni non decrescenti. Inoltre, siccome $\pm f' \le v'$ quasi ovunque (Fatto 4.2), abbiamo $|f'| \le v'$ quasi ovunque in (a,b). Quindi, sempre per il teorema precedente,

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \le \int_a^b v'(x)\,dx \le v(b) - v(a) = \mathrm{Var}(f;[a,b]).$$

□

Si osservi che, per f monotona non decrescente, la disuguaglianza (5) diventa esattamente la (4).

Per chi conosce la nozione di assoluta continuità, aggiungiamo il famoso fatto (che qui non dimostreremo) che *se f è assolutamente continua su $[a,b]$, allora f ha variazione limitata su $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,, \qquad \int_a^b |f'(x)|\,dx = \mathrm{Var}(f;[a,b]).$$