UN ESEMPIO RIGUARDANTE LA TOPOLOGIA DEBOLE IN ℓ_p
(L.V., NOVEMBER 2017)

Non conosco l'autore di questo esempietto, che ho visto menzionato (senza citazione, per $p = 2$) in un lavoro di F. Harder sulle forme quadratiche.

Sia $1 < p < +\infty$ e sia q il suo esponente coniugato, cioè, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Consideriamo l'insieme

$$E = \{n^{1/q} e_n : n \in \mathbb{N}\}$$

dove e_n è l'n-esimo elemento della base canonica di ℓ_p.

Siccome le successioni debolmente convergenti sono limitate, E è debolmente sequenzialmente chiuso.

Dimostriamo ora che $0 \in \overline{E}^w$. Ricordiamo che il duale di ℓ_p è isometrico a ℓ_q. Fissiamo un intorno debole di 0 del tipo

$$W = \{x \in \ell_p : \ |\langle x, y_i \rangle| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, k\}$$

dove $\varepsilon > 0$, $y_1, \ldots, y_k \in \ell_q$ e $\langle x, y \rangle := \sum_n x(n)y(n)$ $(x \in \ell_p, y \in \ell_q)$. La successione $z := \max\{|y_1|, \ldots, |y_k|\}$ è un elemento di ℓ_q (in quanto maggiorata da $|y_1| + \cdots + |y_k|$). Perciò $n^{1/q} z(n) < \varepsilon$ per infiniti n. Per ogni tale n, $n^{1/q} e_n \in W$, e abbiamo finito.

Commento 1. È un esercizio facile, dimostrare che $\overline{E}^w = E \cup \{0\}$.

Commento 2. Un'esempio simile in ℓ_1 con l'insieme E non numerabile è classico: sia $E = S_{\ell_1}$ (la sfera unitaria di ℓ_1). Allora:

- $\overline{E}^w = B_{\ell_1}$ (la bola unitaria chiusa; questo è un fatto generale), mentre
- E è debolmente sequenzialmente chiuso (per il teorema di Schur).