Appendici

&1: Immagine della copertina

Il disegno riprodotto in copertina è un ben noto esempio di multistabilità nella percezione: si può vedere una giovane o una vecchia, con alternanza tra le due (il mento della giovane è anche il naso della vecchia, o viceversa).

Nel mio libro *Matematica e insegnanti della formazione primaria* ho proposto l'interpretazione del disegno adattata alla Matematica indicata a p. 2 (La Matematica: affascinante signora o vecchia megera?), che ho poi incontrato in *internet* con datazione successiva e denominazione "Vecchia strega o affascinante giovane signora?".

Conosco due attribuzioni del disegno.

La prima è quella di Fred Attneave in "Multistabilità nella percezione" («Le scienze», n. 43, marzo 1972):

> Questo disegno, raffigurante una giovane donna e una vecchia, fu sottoposto all'attenzione dello psicologo Edwin G. Boring nel 1930.
> Creato dal caricaturista W.E. Hill, fu pubblicato originariamente nel 1915 su «Puck» col titolo "Mia moglie e mia suocera".

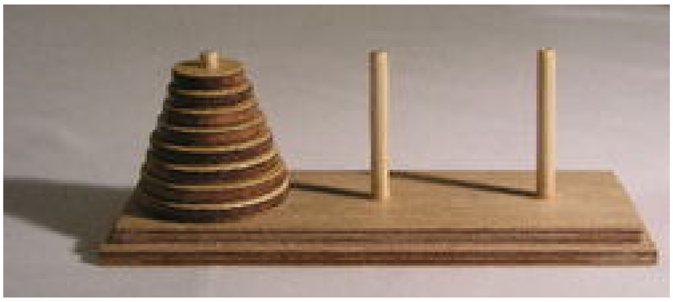
La seconda è quella di Richard L. Gregory in *Occhio e cervello* (Milano, Cortina, 1998; *Eye and Brain*, 1998):

> Una anziana signora o una giovane donna?
> Si tratta di una figura ambigua disegnata da E.G. Boring.
> Soffermandosi su particolari differenti (le orecchie, il collo, il naso), l'immagine può essere commutata a piacimento tra le due alternative possibili.

&2: Immagine della quarta di copertina

La *Torre di Hanoi* è un gioco, proposto anche come oggetto per regalo, che si presta a utilizzazioni diverse in relazione all'età del giocatore (e, quindi, a riutilizzazioni) e a considerazioni matematiche.

Come mostra la figura, ci sono tre pioli su una tavoletta e in uno di questi sono infilati dei dischi forati di diametri tutti diversi tra loro, in ordine decrescente dal basso.



Il gioco consiste nel ricostruire la torre di dischi su un altro piolo (che può essere fissato preliminarmente), rispettando due regole:

- spostare soltanto un disco alla volta;
- non mettere mai un disco su uno più piccolo.

Il numero dei dischi è arbitrario (nella torre della figura sono otto).

In *internet* sono reperibili varie trattazioni del gioco, anche con figure animate e con possibilità di giocare al *computer*, e interessanti notizie storiche; di queste basta qui ricordare quella relativa alla invenzione del gioco da parte del matematico francese Edouard Lucas nel 1883, accompagnata da una leggenda su una torre di 64 dischi.

Il gioco è significativo per le possibilità di riflessioni sulle strategie che possono essere utilizzate e (come già accennato) sulla trattazione matematica[1], ma è interessante anche per osservare comportamenti di chi lo affronta senza attenzioni matematiche o, addirittura, senza essere guidato dalle due regole predette, come capita di veder fare da bambini.

---

[1] Può essere utilizzata, anche, la numerazione binaria.

Da questo punto di vista, la torre, considerata semplicemente come materiale da utilizzare liberamente, ha qualcosa che si può dire pre-montessoriano[2], sia pure a livello più di osservazione che di attività educativa[3]. In particolare si può rilevare come bambini in età da scuola dell'infanzia costruiscano la torre rovesciata, con il disco piccolo in basso, utilizzando un piolo libero.

Dal punto di vista delle strategie interessa osservare che si può, ovviamente, procedere per tentativi o cercare una procedura sistematica, anche in relazione al fatto che il piolo di arrivo sia fissato o no.

Dal punto di vista della trattazione matematica (che si collega, ovviamente, a una procedura sistematica) si tratta di individuare il numero di mosse necessarie per raggiungere l'obiettivo (evitando ripetizioni con ritorni a situazioni precedenti).

Una strategia che eviti ripetizioni e che tenga conto dell'eventuale assegnazione del piolo d'arrivo può essere chiamata "razionale": le regole del gioco sono tali che, a piolo d'arrivo fissato, la strategia razionale sia unica e determinata dalla prima mossa, che consiste nella scelta del piolo nel quale infilare il primo dischetto (v. sotto); se il piolo d'arrivo non è fissato, questa scelta è libera e lo spostamento iniziale può essere fatto in uno qualsiasi dei due pioli liberi.

Per comodità e brevità di formulazione, i tre pioli verranno indicati rispettivamente con:

- *I* il piolo sul quale sono infilati inizialmente i dischi;
- *A* il piolo fissato per l'arrivo;
- T il piolo utilizzato per il transito.

Il caso di un unico disco è banale: si tratta di spostare il disco da *I* ad *A* (una mossa).

Con due dischi si tratta di spostare il primo da *I* a *T*, il secondo da *I* ad *A* e, infine, il primo da *T* ad *A* (tre mosse).

Con tre dischi si tratta di spostare il primo da *I* ad *A*, il secondo da *I* a *T*, il primo da *A* a *T,* il terzo da *I* ad *A*, il primo da *T* ad *I*, il secondo da *T* ad *A*, il primo da *I* ad *A* (sette mosse).

---

[2] Con riferimento a Maria Montessori (1870-1952) e ai suoi materiali didattici,

[3] Come è noto, tra i materiali proposti da Maria Montessori c'è la "torre rossa" (o rosa): informazioni sono facilmente reperibili in *internet* (#I/m torre rossa Maria Montessori) e non pare necessario soffermarsi sull'argomento.

E così via.

Se il numero dei dischi è dispari, il primo disco va spostato da *I* ad *A*; se il numero dei dischi è pari, il primo va spostato da *I* a *T*[4].

È evidente che la strategia esposta non è migliorabile o, come si suole dire, che è ottimale.

La strategia razionale su *n* dischi può essere vista come ricorsiva, nel senso seguente[5]:

- si considera la torre dei primi n-1 dischi spostata da *I* a *T;*
- si considera l'ultimo disco spostato da *I* ad *A*;
- si riconsidera la torre dei primi n-1 spostata da *T* ad *A*.

Indicato con $<j>$ il numero di mosse necessario per spostare una torre di *j* dischi (j=1, …, n), è:

$$<n>=<n-1> + <1> + <n-1>=2<n-1>+1 \qquad [*].$$

Il numero di mosse è, quindi, facilmente determinabile, tenendo conto che, come si è indicato sopra, è rispettivamente 1, 3, 7 per torri di uno, due, tre dischi; è:

$$\begin{array}{lll}
<1> =1= & & 2^1 \ -1 \\
<2> =3=<1>+1+<1> & =2.(2^1-1)+1=2.2^1+2-1= & 2^2 \ -1 \\
<3> =7=<2>+1+<2> & =2.(2^2-1)+1=2.2^2+2-1= & 2^3 \ -1 \\
<n-1> = \ <n-2>+1+<n-2>= & & 2^{n-1}-1 \\
<n> = \ <n-1>+1+<n-1> = & & 2^n \ -1.
\end{array}$$

Si noti che il numero di mosse per una torre di *n* dischi è esprimibile non soltanto ricorsivamente (nel senso di esprimere $<n>$ mediante $<n-1>$) come indicato dalla formula [*], ma anche esplicitamente mediante la potenza n-esima di 2 con l'ultima formula scritta sopra, e cioè

$$<n> = 2^n-1.$$

I numeri di mosse per torri di n=1, 2, 3, …, 16 dischi sono 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511. 1023, 2047, 4095, 8191, 16383, 32767, 65537.

Per la torre di 64 dischi. collegata alla invenzione del gioco (come già accennato), il numero di mosse è 18.446.744.073.709.551.615, cioè un numero di venti cifre.

---

[4] Se non è fissato il piolo di arrivo, la scelta è libera (come già accennato).

[5] Non pare necessario soffermarsi sull'uso di ricorsivo e di ricorrente, né sulla teoria della ricorsività.