

Matematica ed emergenza educativa

Gabriele Lucchini ¹

Nelle riflessioni sulla emergenza educativa ², considerazioni sulla Matematica possono avere notevole interesse da (almeno ³) tre punti di vista:

- le possibilità della Matematica come strumento di formazione integrale della persona, già in relazione a situazioni precedenti l'enunciazione della emergenza educativa;
- gli insuccessi dei docenti di Matematica dal punto di vista formativo;
- gli stimoli delle “assiomatizzazioni della Matematica” come esplicitazione dei punti di partenza e dei riferimenti scelti e come strumento di verifica ⁴.

ASSIOMATIZZAZIONI E ASSIOMI IN GEOMETRIA

Poiché le assiomatizzazioni e la loro importanza in Matematica (e non soltanto in questa disciplina) sono un argomento spesso trascurato e talvolta frainteso nelle scuole secondarie superiori, comincio con alcuni chiarimenti in proposito, riportando due citazioni di Carlo Felice Manara (1916-2011) ⁵.

«[...] *la Geometria era stata considerata in un certo senso come una scienza avente certi contenuti e certi oggetti. Essa esplicava il proprio rigore nell'enunciare come postulati (o assiomi che dir si vogliono) tutte le proposizioni che non dimostrava, e nel dimostrare rigorosamente in seguito tutte le altre proposizioni che enunciava sotto forma di teoremi. Tuttavia le proposizioni enunciate come “assiomi” erano considerate come “evidenti”, e come prese dalla osservazione della realtà esistente di uno “spazio geometrico” che si pensava costituisse l'oggetto della Geometria.*» ⁶.

«[...] *la Geometria viene oggi considerata in modo essenzialmente diverso da quello in cui era concepita secondo la impostazione classica, cioè viene concepita come sistema ipotetico-deduttivo. Secondo questa concezione le proposizioni iniziali (gli “assiomi”) non vengono più enunciate con la pretesa che siano assolutamente apodittiche e accettate in forza della loro evidenza; perché tale “evidenza” sarebbe fornita dalla osservazione delle proprietà fondamentali di un certo ipotetico oggetto per es. “lo spazio geometrico” che non può esistere (almeno come lo si pensava secondo le concezioni classiche), perché ammetterebbe delle teorie contraddittorie. Quindi gli assiomi sono enunciati semplicemente come “ipotesi” che servono a fondare la trattazione successiva.*

La scelta di tali assiomi è, a rigore, arbitraria, salve certe condizioni di cui diremo subito.

¹ Gabriele Lucchini è frequentatore come docente in pensione del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano, dove cura le pagine *internet* <http://users.mat.unimi.it/users/lucchini/gab100.htm> e ha l'indirizzo di posta elettronica gabriele.lucchini@unimi.it. In dette pagine ha proposto un sito su Carlo Felice Manara, suo maestro ampiamente citato in questo articolo.

² Varie considerazioni sull'argomento sono reperibili, anche, in *internet*.

³ Non interessa, qui, escludere la possibilità di altri approfondimenti, come – ad esempio – utilizzazioni della matematica nella scienza e nella tecnica o nell'arte (citate anche in seguito).

⁴ Sarò grato di osservazioni e suggerimenti, che verranno segnalati in [g316.htm](http://users.mat.unimi.it/users/lucchini/g316.htm) della nota successiva.

⁵ Le citazioni sono riportate, anche, nell'articolo “Carlo Felice Manara: il passato, il presente, il futuro” consultabile in <http://users.mat.unimi.it/users/lucchini/cfms3d9.pdf> e sono riprese dalla bellissima “Introduzione” (pp. vii-xxiii) alla edizione italiana (Milano, Feltrinelli, 1970) di *Fondamenti delle geometria* di David Hilbert (1862-1943). Questa “Introduzione”, che invito a leggere per una trattazione esauriente, e dati sul libro e sulle edizioni originali sono reperibili in *internet* all'indirizzo <http://users.mat.unimi.it/users/lucchini/gld18.htm>. *Link* a questo e agli altri *file* citati e complementi a questo articolo sono in <http://users.mat.unimi.it/users/lucchini/g316.htm>; nel seguito queste sinergie sono indicate con rimandi a *WGL*.

Informazioni sugli autori citati in questo articolo sono reperibili, anche, in *internet*.

⁶ La frase (parte I, § 1, quarto capoverso) è facilmente reperibile nel testo in *WGL* cercando “oggetti” (che è tra 04* e 05*).

Di fatto tuttavia, se si vuole che la teoria che si costruisce possa ancora con qualche legittimità chiamarsi Geometria, cioè abbia una certa continuità storica con la teoria che durante i secoli è stata chiamata con questo nome, gli assiomi vengono suggeriti dalle esperienze che noi compiamo nello spazio e con gli enti estesi. [...]»⁷.

Molti sanno che la radice storica delle riflessioni su assiomatizzazioni e assiomi in senso moderno⁸ viene abitualmente indicata nella costruzione delle cosiddette geometrie non-euclidee⁹, che vengono comodamente ricondotte alla negazione del quinto postulato di Euclide considerato nella forma della unicità: «Per un punto fuori di una retta passa una sola parallela alla retta stessa»¹⁰, negazione che ha portato alla “geometria ellittica” (nessuna parallela) e alla “geometria iperbolica” (due o più di due parallele¹¹)¹².

Ho constatato che meno nota (e, spesso, meno chiara) è la questione della «*perfetta compatibilità logica*»¹³ tra la geometria euclidea e le geometrie non-euclidee, che non soltanto pone il problema di precisare quale sia «*l'aggancio con la realtà che è tipico della Geometria*»¹⁴ ma anche, e per certi aspetti soprattutto, evidenzia il problema della “verità”, nel senso ben chiarito da Jules Henri Poincaré (1854-1912): «*Una geometria non può essere più vera di un'altra: essa può solamente essere più comoda*»¹⁵.

Tornando a C. F. Manara, mi pare opportuno richiamare che le «*condizioni*» citate riguardano

«la non contraddittorietà delle proposizioni iniziali (assiomi), assunte come ipotesi di ragionamento, sulle quali si basa tutta la trattazione successiva. La non esistenza infatti di una realtà oggettiva che imponga con la sua evidenza i contenuti delle proposizioni iniziali toglie la garanzia di coerenza interna di queste proposizioni; rimane quindi il dubbio fondamentale che queste proposizioni, anche se visibilmente non contengono contraddizioni palesi, siano però tali da dar luogo a contraddizioni quando se ne deducano delle conseguenze in numero adeguato.»¹⁶.

LE ASSIOMATIZZAZIONI COME ESPLICITAZIONE E COME VERIFICA

Pur non volendo dilungarmi sulle assiomatizzazioni della geometria¹⁷, mi pare opportuno evidenziare alcuni aspetti, che interessano anche in generale:

- l'esplicitazione delle proposizioni assunte come ipotesi di ragionamento, eventualmente anche come presa di consapevolezza delle scelte;
- l'analisi della non contraddittorietà degli assiomi;
- l'eventuale analisi della indipendenza degli assiomi¹⁸;

⁷ La frase (parte I, § 5, inizio) è facilmente reperibile nel testo in *WGL* cercando “oggi”. Sulla attribuzione della locuzione “sistema ipotetico-deduttivo” a Mario Pieri (1860-1913) rimando a *WGL*.

⁸ Spesso viene indicata come “classica” l'impostazione euclidea.

⁹ Uso la forma con il trattino per evidenziare la convenzionalità della denominazione.

¹⁰ Seguo la formulazione di *Gli Elementi di Euclide* a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, UTET, ristampa 1988 dell'edizione 1970, p. 72. Non mi pare necessario soffermarmi sull'enunciato di Euclide e su questioni tecniche di equivalenza di formulazioni.

¹¹ Non mi pare importante approfondire la questione.

¹² Non mi pare il caso di soffermarmi, qui, in considerazioni storiche; indicazioni sono in *WGL*.

¹³ V. “Introduzione” citata, parte I, § 1, penultimo capoverso; nel testo in *WGL*: 07*.

¹⁴ V. “Introduzione” citata, a seguito della frase considerata nella nota precedente.

¹⁵ La citazione è ripresa da “La più recente definizione di matematica” di Giovanni Vailati (1863-1909), *Leonardo*, giugno 1904 (ristampato in *Scritti*, Leipzig e Firenze, Barth e Seeber, 1911, dove la frase è a p. 530). La citazione è seguita dall'indicazione «(Poincaré, *Science et hypothèse*, pag. 67)»; nell'edizione del 1929 (*La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion) è, pure, a p. 67: «*Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être plus commode*» (v. *WGL*).

¹⁶ V. “Introduzione” citata, parte I, § 6, inizio.

¹⁷ Ho già invitato (nota 5) alla lettura della “Introduzione” di C. F. Manara per una trattazione esauriente sul ruolo delle geometrie non-euclidee; non mi pare il caso di considerare altre geometrie.

¹⁸ Si tenga presente che, a differenza della non contraddittorietà, l'indipendenza non è indispensabile e che in certi casi può essere addirittura più comodo usare assiomi sovrabbondanti.

- il passaggio dalla “verità” alla “coerenza”, nel senso che non postulandosi più la verità degli assiomi si può soltanto considerare la coerenza delle deduzioni con gli assiomi;
- la verifica della rispondenza delle scelte alle situazioni che si considerano ¹⁹;
- l’arbitrarietà dei sistemi di assiomi, sia come “oggetti” ai quali sono riferiti ²⁰ e sia come “ipotesi di ragionamento”;
- la possibilità di individuazione di sistemi di assiomi per ricostruire una teoria, come, ad esempio, la geometria euclidea ²¹;
- l’adattabilità delle considerazioni sulle assiomatizzazioni della geometria ad altre teorie, non soltanto su contenuti considerati tradizionalmente scientifici.

SULLA MATEMATICA COME STRUMENTO DI FORMAZIONE INTEGRALE DELLA PERSONA

Ai lettori già convinti delle possibilità della Matematica come strumento di formazione integrale della persona ²² e a quelli disposti a una apertura di credito su questa possibilità risulterà chiaro il motivo dell’anticipazione delle considerazioni sul punto di vista enunciato inizialmente come terzo: in questo ordine di idee per parlare di “formazione della persona” occorre avere «*ipotesi di ragionamento*» sull’uomo e sulla formazione e che a queste si possa (e si sappia) collegare la Matematica.

È un dato di fatto che sull’uomo e sul senso della sua vita (come specie e come individuo) ci sono diverse concezioni; ed è un dato di fatto che si sono determinate situazioni che hanno portato a parlare di “emergenza educativa” nel senso che può essere detto di “momento critico” e che fa “emergere” la necessità di consapevolezza antropologica nelle conoscenze e nelle scelte.

Ed è, pure, un dato di fatto che sulla Matematica ci sia varietà di opinioni, in particolare per quanto riguarda l’apprendimento scolastico.

Ferma restando la (ovvia) libertà di scelte personali, invito a considerare i riferimenti segnalati qui sotto sulla persona, sulla emergenza educativa, sulla Matematica, su aspetti formativi della Matematica..

Sulla persona

Sulla persona da anni accosto un quadro del padre saveriano Battista Mondin a indicazioni di Jacques Maritain (1882-1973).

Del quadro di B. Mondin in *L’uomo chi è? Elementi di antropologia filosofica* ²³ riporto i dieci attributi dell’uomo, ai quali corrispondono i dieci capitoli della prima parte del libro:

*somaticus, vivens, sapiens, volens, loquens,
socialis, culturalis, faber, ludens, religiosus.*

Di J. Maritain riporto due citazioni dal libro *L’educazione al bivio* ²⁴.

«*Se è vero, inoltre, che il nostro principale dovere consiste, secondo la profonda massima di Pindaro (e non di Nietzsche), nel diventare ciò che siamo, niente è più importante per ciascuno di noi e niente è più difficile che divenire un uomo. Così il compito principale dell’educazione è soprattutto quello di formare l’uomo, o piuttosto di guidare lo sviluppo dinamico per mezzo del quale forma se stesso ad essere un uomo.*» (pp. 13-14).

¹⁹ Si può dire che il «comodo» di J. H. Poincaré viene sostituito da “adeguato” o “adatto”.

²⁰ Tenendo presente che gli “oggetti” sono non soltanto quelli dai quali si parte, ma anche tutti quelli che soddisfano gli assiomi. D. Hilbert inizia la sua trattazione considerando «*tre diversi sistemi di oggetti*».

²¹ Sono stati dati più sistemi di assiomi per la geometria euclidea.

²² Non penso che occorra, qui, soffermarsi su questa scelta terminologica.

²³ Milano, Massimo, 1982⁴; l’indice è consultabile in WGL.

²⁴ Brescia, La Scuola, 1976, traduzione di *L’éducation à la croisée des chemins*, Paris, Egloff, 1947; prima edizione *Education at the Crossroad*, New Haven, Yale University Press, 1943; indice e altre citazioni sono consultabili in WGL. Un estratto del libro (pp. 17-21) è inserito nel sito *internet* <http://www.disf.org> di *Documentazione Interdisciplinare di Scienza e Fede* (v. WGL). Nell’edizione italiana è dichiarato che l’edizione francese è stata «*riveduta “riga per riga” dall’Autore*» (p. 6).

«Il concetto filosofico e religioso dell'uomo può assumere molte forme. Quando affermo che l'educazione dell'uomo, se si vuole solidamente e pienamente formata, deve essere basata sul concetto cristiano dell'uomo, è perché penso che questo è il vero concetto dell'uomo, e non già perché vedo che la nostra civiltà è di fatto permeata di questa idea.» (p. 19).

Sulla emergenza educativa

Sulla “emergenza educativa” invito a considerare due stimoli, che riporto dal mio *Insuccessi in matematica, programmi di insegnamento, formazione degli insegnanti: documenti e spunti di riflessione*, Roma, Aracne, 2008²⁵.

«Il primo stimolo è la «Lettera del Santo Padre Benedetto XVI alla diocesi e alla città di Roma sul compito urgente dell'educazione» (21 gennaio 2008)²⁶, della quale riporto il passo seguente.

Educare però non è mai stato facile, e oggi sembra diventare sempre più difficile. Lo sanno bene i genitori, gli insegnanti, i sacerdoti e tutti coloro che hanno dirette responsabilità educative. Si parla perciò di una grande “emergenza educativa” confermata dagli insuccessi a cui troppo spesso vanno incontro i nostri sforzi per formare persone solide, capaci di collaborare con gli altri e di dare un senso alla propria vita. Viene spontaneo, allora, incolpare le nuove generazioni, come se i bambini che nascono oggi fossero diversi da quelli che nascevano nel passato. Si parla inoltre di una “frattura fra le generazioni”, che certamente esiste e pesa, ma che è l'effetto, piuttosto che la causa, della mancata trasmissione di certezze e di valori.

Il problema è quello di trovare le strade per utilizzare le indicazioni e riuscire a percorrere queste strade: uno spunto significativo sembra essere quello del collegamento con il messaggio per la 41ª giornata mondiale delle comunicazioni sociali (2007), che aveva come tema «I bambini e i mezzi di comunicazione: una sfida per l'educazione»; sul collegamento tra “frattura” e “mezzi di comunicazione” segnalò la trattazione di Padre Nazareno Taddei sj sullo “jato”²⁷.

Il secondo stimolo è la relazione «Emergenza educativa, scuola e comunità cristiana» tenuta dal Card. Carlo Caffarra (Arcivescovo di Bologna) al Convegno 2008 dell'Ufficio Nazionale di Pastorale scolastica della Conferenza Episcopale Italiana (Bologna, 13-16 febbraio 2008)²⁸.

Premesso che leggo “tradizione” sia come riferimento per approfondimenti sia come chiave di ricerca sulla “emergenza”, la prima citazione, che propongo (rimandando alla relazione) è quella della educazione come inserimento in una

tradizione che diventa presenza dentro alla testimonianza.

La seconda indicazione che riprendo è quella sulla “proposta cristiana dentro la scuola, nelle condizioni proprie di una società plurale”, riportando il seguente estratto (pp. 10-11).

Voglio dire che quanto ho esposto nella seconda parte della mia relazione, può e deve assumere la forma della proposta cristiana. *Intelligentibus loquor*. Nonostante ... l'età, non ho ancora perso completamente l'uso della ragione; e quindi non sto proponendo la ... matematica, la biologia, la fisica cristiana! È qualcosa di più profondo che sto dicendo.

Se ciò che ho detto nella seconda parte è vero. Se cioè la scuola può farci uscire dall'emergenza educativa, purché: (a) educi mediante l'insegnamento delle materie; (b) educi mediante una vera condivisione della esperienza scolastica fra insegnanti e alunni; (c) sia proposta una ipotesi unitaria di vita. Allora la presenza della proposta cristiana dentro la scuola, nelle condizioni proprie di una società plurale e a democrazia procedurale, non può essere emarginata o eliminata.»

²⁵ Informazioni sono in WGL.

²⁶ La “lettera” è reperibile in internet, usando il titolo.

²⁷ Informazioni sono in WGL. Mi limito a richiamare che lo «jato» viene riferito a cambiamenti nella comunicazione ed è considerato tra «cattedra e banchi, tra pulpito e sedie, tra adulti e giovani».

²⁸ La relazione è reperibile in internet, usando il titolo. Anche documentazione su precedenti contributi del Card. Caffarra sulla “emergenza educativa” sono reperibili in internet, usando motori di ricerca con l'autore o l'argomento. Della relazione avevo avuto notizia da un articolo di Avvenire, che riportava il riferimento alla Matematica della citazione inserita poco più avanti.

Estensioni ad aspetti non scolastici paiono abbastanza ovvie²⁹ e abbastanza ovvio pare anche il collegamento alla già citata necessità di consapevolezza antropologica nelle conoscenze e nelle scelte, sulla quale pare qui sufficiente richiamare da un lato le considerazioni sulla “formazione di strutture del pensiero” (sia dal punto di vista teorico e sia da quello esperienziale) e sulle cosiddette “intelligenze multiple”³⁰ e dall’altro la varietà di concezioni dell’uomo.

Sulla Matematica

Indipendentemente dalle definizioni di Matematica che si possono trovare in vocabolari, enciclopedie, testi specialistici e dalle trattazioni incontrate in testi per le varie scuole, e conseguentemente sull’idea che il singolo lettore si è fatto della Matematica, invito a considerare tre punti di vista³¹:

--- MATEMATICA come scienza di contenuti e risultati nel senso reso familiare dallo studio nelle varie scuole e, per alcuni, in università (numeri, figure, ..., o aritmetica, geometria, ...), anche come strumento per cercare risposte e risolvere problemi che l’uomo si pone, anche sulla Matematica stessa;

--- MATEMATICA come scienza di metodo, nel senso già esposto di sistema ipotetico–deduttivo assiomatico;

--- MATEMATICA come oggetto di riflessioni critiche su contenuti, su aspetti di metodo e, in particolare, sulla evoluzione storica del suo statuto epistemologico e delle utilizzazioni.

È del tutto ovvio che le riflessioni possono essere sviluppate a vari livelli, anche in relazione a professioni, studi, gradi di curiosità per la Matematica in sé e per gli strumenti matematici che rendono possibili applicazioni e attività alle quali si è interessati.

Su aspetti formativi della Matematica

Mi pare che a questo punto sia possibile affrontare la questione degli aspetti formativi della Matematica anche per i lettori che sono arrivati fin qui pur non avendo un rapporto particolarmente buono con questo tema.

Ritengo del tutto ovvio che, nella situazione di frequente disinteresse (o, addirittura, di avversione) per la Matematica, il valore formativo di questa disciplina non possa semplicemente essere affermato o posto come assioma, ma debba essere documentato (per non dire “dimostrato”), anche se nei limiti di un articolo come questo.

Premesso che gli aspetti formativi della Matematica riguardano non soltanto la scuola e che ritengo che vadano considerati in relazione a educazione *a*, educazione *con*, educazione *in presenza de* la Matematica³², senza soffermarmi su itinerari di evoluzione delle riflessioni³³ invito a seguire (e sviluppare) i successive spunti sui cinque verbi *essere, sapere, fare, capire, comunicare*³⁴, presi come rappresentativi di aspetti essenziali della vita di ogni uomo in relazione al modo che ognuno ha di darle senso, consapevolmente o inconsapevolmente.

L’uso del verbo **essere**, che si intreccia con quello degli altri, può essere collegato al citato «*essere un uomo*» di J. Maritain: la Matematica ha qualcosa da dare in questo ordine di idee a ognuno e non soltanto a coloro che vengono chiamati “matematici” o che si servono di strumenti o criteri matematici nella loro professione o che hanno un particolare interesse per la Matematica?

²⁹ Ovviamente, si possono considerare le funzioni formative delle discipline e ci si può chiedere in che cosa si vorrebbe che un diplomato di un tipo di scuola fosse diverso da quello di un altro.

³⁰ Richiamo, soltanto, che Howard Gardner in *Frames of Mind – The Theory of Multiple Intelligences* (New York, Basic Books, 1983) considera, in particolare, una intelligenza logico–matematica, distinta da quella spaziale (v. *WGL*).

³¹ Sviluppi sono segnalati in *WGL*.

³² Segnalo la trattazione in *WGL* e gli spunti dell’articolo “Perché dovrebbero studiare Matematica?”, *Tuttoscuola*, n. 476, novembre 2007 (v. *WGL*).

³³ Alcune indicazioni sono in *WGL*.

³⁴ Si possono considerare altri termini; per esempio, nella riforma della scuola del 2003 (legge 28 marzo 2003, n. 53) per il secondo ciclo erano usati “il sapere, il fare, l’agire” (art. 2, g; v. *WGL*).

Chiaramente, si tratta di riflettere sulle qualità dell'uomo e della sua intelligenza che la Matematica può contribuire a sviluppare (eventualmente in concorso con altre discipline e attività).

Anche qui, parto da due citazioni di C. F. Manara.

«Vorremmo inoltre sostenere la importanza del ruolo culturale della matematica; non accettiamo infatti che questa scienza sia confinata nel ghetto delle materie prettamente strumentali, assegnandole il livello di una tecnica (forse anche molto raffinata) che non si può non insegnare perché è molto importante per le applicazioni, ma che non ha nulla da dire sulla formazione dell'uomo. Siamo invece convinti che la matematica abbia un suo posto insostituibile in questa formazione, perché educa alla analisi critica dei concetti, alla astrazione, alla deduzione rigorosa ed anche alla umiltà intellettuale. A nostro parere soltanto una mentalità abbastanza sprovvista potrebbe portare ad insistere sul vieto tema delle «due culture» [...].»³⁵.

«Come si vede, all'origine della scienza modernamente intesa stanno grandi atti creativi, che riguardano la matematica, i suoi metodi e il suo linguaggio. A mio parere, sarebbe molto bello che le nostre scuole trasmettessero non soltanto l'abilità nei calcoli e nella manovra delle procedure, ma anche (e vorrei dire addirittura soprattutto) queste idee, riguardanti il valore della matematica, come chiave di lettura della realtà e strumento insuperabile di conoscenza insieme rigorosa e creativa. Credo infatti che, proprio per poter meglio utilizzare il progresso della tecnologia, l'uomo debba riaffermare ed esaltare la propria libertà, che si esprime nella capacità creativa.»³⁶.

Mi pare opportuno aggiungere che C. F. Manara ha fatto spesso riferimento all'uomo razionale e alla Matematica come strumento di razionalità, sia nella conoscenza e sia in certi comportamenti (tenendo presente che l'uomo ha anche altre componenti)³⁷.

Ai riferimenti a C.F. Manara accosto quelli a un sacerdote matematico, Mario Ferrari della Università degli Studi di Pavia, che ha scritto vari articoli collegati al valore formativo della Matematica³⁸. In "Matematica moderna e maturità umana" (*Periodico di Matematiche*, n. 6 del 1974, pp. 8-20) ha argomentato su

fantastico, creativo, critico, che ragiona logicamente, libero, sociale;

poi ha ripreso l'argomento in particolare nelle due parti di "Valore formativo della matematica" (*L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, luglio 2009 pp. 409-424 e settembre 2009 pp. 513-543)³⁹.

Aggiungo, soltanto, che significative indicazioni (purtroppo spesso ignorate) sono offerte anche dal *problem solving* della Psicologia sperimentale⁴⁰ e che altri aspetti importanti sono quelli della educazione al linguaggio simbolico e alla verifica (anche della ragionevolezza dei risultati)⁴¹.

³⁵ Il brano è ripreso dall'inizio di p. 8 della "Prefazione" a *Momenti del pensiero matematico - Letture su aspetti e problemi delle scienze matematiche* di Carlo Felice Manara e Gabriele Lucchini, Milano, Mursia, 1976. Il libro è liberamente fruibile in *internet* (v. WGL).

³⁶ Il brano è la conclusione di "La creatività in matematica", *Emmeciquadro*, n. 1, marzo 1998, pp. 63-70; l'articolo è riportato in *Insegnare matematica. Esempi di buone prassi in Lombardia* a cura di Anna Paola Longo e Stefania Barbieri, Milano, Guerini, 2008, dove quasi tutto il periodo sopra riportato è messo come citazione iniziale (v. WGL).

³⁷ Segnalo "L'educazione dei giovani" di Adriana Davoli, *Emmeciquadro*, n. 42, agosto 2011, in *internet* senza numerazione delle pagine (v. WGL).

³⁸ Una elencazione sistematica esula dagli obiettivi di questo articolo; una ampia bibliografia è negli articoli di Mario Ferrari citati in seguito.

³⁹ Alcune indicazioni sono consultabili in WGL.

⁴⁰ Alcune indicazioni sono consultabili in WGL. Mi limito, qui, a ricordare che c'è, anche, un *problem solving* della Matematica (v. WGL).

⁴¹ Alcune indicazioni sono consultabili in WGL.

L'uso del verbo **sapere**, che riferisco all'*homo sapiens* come specie e come individuo, porta a considerare due punti di vista: quello della costruzione del complesso dei prodotti disponibili della mente umana⁴² e quello della acquisizione di conoscenze della singola persona, che – se rese disponibili ad altri – sono parte del complesso.

In questo complesso dei prodotti della mente umana – che sono, di fatto, realizzati con riferimenti diversi (anche contrastanti) e possono contenere errori⁴³ – ci sono contenuti matematici e contenuti ottenuti con strumenti, elementi, criteri matematici, che possono venire, e vengono, via via incrementati anche ad alti livelli specialistici e pare auspicabile che ci sia una riflessione su quello che può essere opportuno aggiungere, ovviamente nel pieno rispetto delle scelte di chi ha doti per sviluppare nuove ricerche in vista di nuovi risultati⁴⁴.

Nelle acquisizioni delle singole persone – indipendentemente dal fatto che vengano rese disponibili per l'umana famiglia – accanto a ovvi aspetti utilitaristici (per la vita quotidiana e, eventualmente, per professioni) ci sono gli aspetti formativi e quelli culturali, con problemi di quantità e di qualità degli apprendimenti e con possibilità di collegamenti con gli altri verbi considerati in queste pagine.

In particolare ci sono i problemi di gestione dell'accumulo di proposte e offerte e di scelta degli elementi ai quali dedicare attenzione, con inevitabili collegamenti alla questione antropologica, che – pensando all'uomo consapevole – si potrebbe sintetizzare nella forma “come faccio a sapere a che cosa mi serve la Matematica per essere l'uomo che voglio essere e nell'esserlo?”.

Mi pare evidente che qui si pone la necessità di mediatori credibili sia dal punto di vista delle indicazioni sui contenuti e sia dal punto di vista dei modi per favorirne l'acquisizione, in relazione ai livelli di interessi cognitivi e di impegno culturale delle singole persone. E, anche in relazione al tempo e alla maturazione richiesti, viene naturale pensare alla scuola e ai programmi di insegnamento da un lato e ai libri di testo e ai materiali complementari dall'altro, in particolare rispetto a quella che, con uno stile di alcuni anni fa, si potrebbe chiamare “okkupazione” degli spazi con proposte non adeguate⁴⁵.

Non essendo questa la sede per disquisire su quello che dovrebbe fare parte del bagaglio personale⁴⁶ e sui modi di proporlo e di renderlo disponibile, mi limito ad alcune sollecitazioni alla riflessione (svilupate in *WGL*), tenendo conto di quanto considerato per gli altri verbi:

- strutturazioni del sapere;
- strutturazioni della Matematica;
- sapere sulla Matematica (anche per la citata evoluzione), sapere di Matematica, Matematica nel sapere;
- ruolo della Matematica nella cultura occidentale⁴⁷, con specifici riferimenti alle scienze naturali e umane, all'arte, alla filosofia, alla tecnica;

⁴² Come è noto, Karl R. Popper (1902-1994) ha parlato a questo proposito di “mondo 3” (dopo i mondi 1 e 2 delle entità fisiche e degli stati mentali); da *WGL* è consultabile una citazione da *L'io e il suo cervello* di Karl R. Popper e John C. Eccles, Roma, Armando, Vol. III, 1982, pp. 54-55 (*The Self and Its Brain*, Berlin, Springer, 1977).

⁴³ Uso “errore” in senso generico, senza indugiare su aspetti logici, ontologici, morali (v. *WGL*).

⁴⁴ La questione si pone, in particolare, per chi ritiene di prendere come riferimento il contribuire al bene comune.

⁴⁵ Ritengo che un ampio dibattito sui libri di testo e sui materiali complementari (in particolare per i compiti delle vacanze) sarebbe opportuno non soltanto dal punto di vista della spesa. In particolare sarebbe opportuno riflettere sulle implicazioni negli insuccessi considerati più avanti.

⁴⁶ Segnalo l'articolo “Che cosa una persona colta deve sapere di matematica” di Carlo Felice Manara, *Nuova secondaria*, aprile 1985, pp. 15-18 (indicazioni sono consultabili in *WGL*).

⁴⁷ *La matematica nella cultura occidentale* è il titolo di un importante libro di Morris Kline (1908-1992), pubblicato in italiano nel 1976 (Milano, Feltrinelli) come traduzione di *Mathematics in Western Culture* (Oxford University Press, 1953); l'indice è reperibile in *WGL*. Carlo Felice Manara intitolò un articolo “La Matematica nel pensiero occidentale”, *Per la Filosofia, Filosofia ed insegnamento*, III, 6 (gennaio-aprile 1986, pp. 25-36). Informazioni sui due testi sono consultabili in *WGL*.

- compiti degli estensori dei programmi della scuola e di altri mediatori, anche in relazione alla curiosità e agli interessi per l'apprendimento e alla possibilità di servizi agli utenti (quadri di riferimento, schedari, lemmari aperti e gerarchizzati, ...).

Un inventario di quanto nell'umana famiglia si è in grado, e si studia, di **fare** con la Matematica va al di là degli obiettivi di questo articolo e, presumibilmente, richiederebbe la collaborazione tra specialisti per singoli settori di studi matematici ⁴⁸ e persone interessate a costruire quadri di riferimento generali (aperti e gerarchizzati, come i lemmari citati poco fa).

Per quanto riguarda il fare delle singole persone al di fuori delle professioni, che può essere sintetizzato nella domanda "che cosa faccio con la Matematica e che cosa potrei fare meglio con la Matematica?", mi limito a invitare a proporre, invitando a tenendo presente il *learning by doing* ⁴⁹:

- fare nella vita quotidiana, con uso di strumenti e con applicazione di mentalità ⁵⁰;
- eventuale fare nella matematica ricreativa, occasionale o sistematico;
- razionalizzare situazioni;
- modellizzare situazioni usando il linguaggio matematico (matematizzare) ;
- interpretare situazioni matematizzate (de/matematizzare);
- cercare l'ottimizzazione di procedure e, se possibile, di soluzioni, come atteggiamento e con eventuale uso di metodi più o meno elementari.

Anche sul **capire** è necessario distinguere tra quanto è stato, e viene, fatto a livello di umana famiglia nel suo complesso e quanto riguarda la singola persona.

Per l'umana famiglia valgono considerazioni analoghe a quelle viste sul fare.

Per quanto riguarda il capire delle singole persone al di fuori delle professioni, che può essere sintetizzato nell'adattamento della domanda precedente a "che cosa capisco con la Matematica e che cosa potrei capire meglio con la Matematica?", mi limito a invitare a considerare ⁵¹:

- informazioni, istruzioni per l'uso, attività della vita quotidiana;
- concetti elementari spesso incontrati prima o fuori di trattazioni scolastiche (numeri, figure, lunghezza, area, simmetria, prospettiva, ...), anche con loro approfondimenti;
- modi di dire, più o meno precisi;
- strumenti per le scienze naturali e per le scienze umane (che qualcuno chiama sociali);
- elementi per oggetti della tecnica;
- riferimenti per la filosofia, per la letteratura, per la musica, per le arti figurative, ...

Infine, anche sul **comunicare** è necessario distinguere tra quanto è stato, e viene, fatto a livello di umana famiglia nel suo complesso e quanto riguarda la singola persona: il linguaggio matematico, anche nel quadro dei linguaggi scientifici settoriali, ha recepito e sviluppato nuovi concetti e nuovi strumenti comunicativi, con simboli e regole, sui quali non pare necessario soffermarsi ⁵².

SU INSEGNAMENTI DEGLI INSUCCESSI NELL'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

Nonostante la scelta di fare della Matematica una disciplina scolastica con non poche ore di insegnamento ⁵³ e di inserire impegnative dichiarazioni in programmi scolastici ⁵⁴, gli insuccessi nell'apprendimento della Matematica in Italia sono un fatto ben noto, che si riscontra in valutazioni dirette e in indagini anche internazionali ⁵⁵, oltre che in scritti, opinioni, dichiarazioni ⁵⁶.

⁴⁸ Nell'articolo "Il monopolio dell'editoria scientifica" (*Avvenire* del 26 ottobre 2011) Giuseppe O. Longo ha scritto: «la metà del milione circa di articoli di matematica pubblicati da che mondo è mondo sono stati stampati nell'ultimo decennio»; e ci sono, anche, libri, siti *internet* e altre fonti.

⁴⁹ Informazioni sono reperibili, anche, in *internet*.

⁵⁰ Nella "Conclusione" proporrò una significativa citazione di Pavel A. Florenskij.

⁵¹ Sviluppi sono in *WGL*.

⁵² Indicazioni sono in *WGL*, anche su ritorni al linguaggio comune.

⁵³ Non è questa la sede per considerare le rivendicazioni di un maggior numero di ore per la Matematica.

⁵⁴ Alcune citazioni sono indicate in *WGL*.

⁵⁵ Sono ben noti gli interventi del ministro Giuseppe Fioroni (estate 2007) e le prove INVALSI e OCSE. Alcune indicazioni sono consultabili in *WGL*, anche in relazione al mio predetto libro sugli *Insuccessi in Matematica*.

⁵⁶ Alcune indicazioni sono in *WGL*.

In questo ordine di idee, riporto una citazione (che ritengo ottimistica nel senso che preciserò) di Massimo Bontempelli ⁵⁷ della quale sono debitore a Bruno de Finetti ⁵⁸, che la inserì nel *Periodico di Matematiche* [dicembre 1973 (p. 36) e numero unico 1976 (p. 4)], riprendendola da “Incomprensibile o affascinante?” in “*Colloqui*”, *Tempo*, n. 198, marzo 1943.

«Tutti coloro che si credono più o meno artisti si fan vanto di aver avuto zero in matematica fin dalle prime classi.

Ho avuto modo di osservare che in questa incomprensione verso la matematica la gente è spesso sincera, ma mi sono anche convinto che la colpa è solo del modo con cui la matematica è insegnata.

Il difficile non è capire la matematica, è farla capire: chi si dedicasse per qualche tempo alla specialità “pedagogia della matematica” e creasse una didattica delle scienze esatte farebbe opera utilissima,

Capita, diventerebbe per ogni scolaro la più affascinante delle discipline, e soffusa di mistero.

Ritengo le affermazioni di M. Bontempelli ottimistiche nei confronti non della Matematica, ma della realizzabilità: di persone, anche molto autorevoli, che hanno fatto o fanno proposte teoriche e pratiche su pedagogia e didattica della Matematica ce ne sono state e ce ne sono, ma risulta che buone idee e buoni materiali didattici non bastano e, anche, che i buoni insegnanti non risultano tali per tutti i loro alunni.

Ma qui gli insuccessi in Matematica interessano non in sé, ma per quello che possono suggerire sulla “emergenza educativa” e sulla complessità del problema, anche in relazione alla quantità e alle caratteristiche degli elementi in gioco, in un caso e nell’altro, oltre alle implicazioni delle “okkupazioni”.

Per la Matematica si vede facilmente che accanto all’esistenza di difficoltà oggettive vanno considerate le conseguenze della cosiddetta “immagine sociale” di questa disciplina, che non soltanto favorisce, ma addirittura sembra legittimare rifiuti e avversioni per la Matematica (al di là di banali aspetti operativi), senza che venga fatto capire (o addirittura senza che venga proposto) il valore di questa disciplina ⁵⁹. Come se non venisse fatta una adeguata politica dell’insegnamento della Matematica e della formazione degli insegnanti di Matematica ⁶⁰.

Discorso analogo sembra valere per l’emergenza educativa: si consideri l’inizio della citazione di S. S. Benedetto XVI, si pensi ai modelli che vengono proposti, ai problemi di evidenziare, di comunicare, di far comprendere i valori in questo contesto sociale non soltanto distratto, ma anche fuorviato, si rifletta sulla situazione degli aiuti e dei servizi offerti per combattere ignoranza e rifiuti, oltre che degenerazioni.

⁵⁷ Informazioni su Massimo Bontempelli (1878-1960), scrittore e saggista, sono reperibili, anche, in *internet* (come già ricordato in nota 5 per gli autori citati nell’articolo).

⁵⁸ Bruno de Finetti (1906-1985) è stato uno dei grandi matematici del secolo scorso e diresse il *Periodico di Matematiche* dal 1972 al 1981; a lui è dedicato un sito *internet* consultabile, anche, da WGL.

⁵⁹ Le considerazioni sulle eventuali responsabilità di matematici esulano dagli obiettivi di questo articolo: mi pare, però, opportuno invitare a riflettere (in particolare i matematici) sulla seguente affermazione del pedagogista Francesco De Bartolomeis: «Nessuna persona che abbia conosciuto a fondo un matematico (nei suoi comportamenti, nelle sue valutazioni riguardanti problemi pratici o altri settori del sapere, potrebbe dare credito all’idea secondo cui il valore principale della matematica consiste nell’educare l’intelligenza.» (*Sistema dei laboratori*, Milano, Feltrinelli, 1978, p. 143).

⁶⁰ Ovviamente, la questione non è esclusiva della Matematica e i problemi di legislazione hanno un peso notevole. Ma voglio ribadire l’importanza delle riflessioni culturali e dell’offerta di servizi agli insegnanti (in formazione o in servizio). E mi pare che sia opportuno invitare a rileggere ciò che l’art. 395 del decreto legislativo 16 aprile 1994, n. 297 (*Approvazione del testo unico delle disposizioni legislative vigenti in materia di istruzione, relative alle scuole di ogni ordine e grado*), afferma a proposito della funzione docente come «*esplicazione essenziale dell’attività di trasmissione della cultura, di contributo all’elaborazione di essa e di impulso alla partecipazione dei giovani a tale processo e alla formazione umana e critica della loro personalità.*». L’art. 395 è riportato in WGL.

CONCLUSIONE

Tornando alla Matematica, concludo con una raccomandazione (in una lettera alla figlia Ol'ga) di Pavel Aleksandrovič Florenskij (1882-1937), presa da *Non dimenticarmi*, Milano, Mondadori, 2001, p. 68⁶¹:

«Per la matematica cerca non solo di ricordare semplicemente cosa e come fare, ma anche di capirlo e di apprezzarlo come si apprende un pezzo musicale.

La matematica non deve essere nella nostra mente come un peso portato dall'esterno, ma come un'abitudine del pensiero: bisogna imparare a vedere i rapporti geometrici in tutta la realtà e a individuare le formule in tutti i fenomeni.

Chi è capace di rispondere all'esame e di risolvere i compiti, ma dimentica il pensiero matematico quando non si parla direttamente di matematica, non ha appreso la matematica.».

Mi pare che basti aggiungere l'esplicitazione della “bellezza della Matematica” e l'auspicio di servizi adeguati di “invito alla Matematica” (non soltanto agli insegnanti e agli studenti), in particolare con una raccolta di “*mirabilia mathematica*”⁶².

E anche questo può essere adattato alla “emergenza educativa”.

⁶¹ *La matematica come abitudine del pensiero* (con il sottotitolo *Le idee scientifiche di Pavel Florenskij*) è il titolo di un libro di Renato Betti (Milano, Centro Pristem - Università Bocconi, 2009, pp. vi + 132). In questo libro la frase citata è a p. 8. con il riferimento alla lettera alla figlia Ol'ga. In *WGL* è consultabile l'indice del libro.

⁶² Un cenno è in *WGL*.