
Indice

1	Introduzione alla Teoria della Probabilità	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Spazio dei Campioni ed Eventi Aleatori	2
1.3	Misura di Probabilità	5
1.4	Costruzione di uno Spazio di Probabilità attraverso Esempi	7
1.4.1	Il Modello Uniforme	8
1.4.2	L'Approccio Frequentista	18
1.5	Condizionamento	19
1.5.1	Probabilità Condizionata	26
1.5.2	Probabilità a Priori e a Posteriori. Formula di Bayes	28
1.6	Indipendenza Stocastica o Statistica	31
1.7	Esercizi	37
2	Variabili Aleatorie	41
2.1	Nozione di Variabile Aleatoria	41
2.2	Legge di Probabilità di una Variabile Aleatoria	43
2.3	Variabili Aleatorie Discrete	46
2.4	Vettori Aleatori	50
2.4.1	Indipendenza di Variabili Aleatorie	52
2.4.2	Vettori Aleatori Discreti	54
2.4.3	Funzioni di Variabili Aleatorie Discrete	58
2.5	Esperimenti Dicotomici Ripetuti ed Indipendenti. Schema di Bernoulli.	60
2.5.1	La Variabile Aleatoria di Bernoulli	60
2.5.2	Lo Spazio di Probabilità di un Numero Finito di Esperimenti Ripetuti ed Indipendenti	61
2.5.3	Lo Spazio di Probabilità di una Infinità Numerabile di Esperimenti Ripetuti ed Indipendenti	67

2.6	Esperimenti Dicotomici Ripetuti: Binomiale ed Ipergeometrica	75
2.7	Processi Stocastici: Bernoulli, Binomiale e Poisson	82
2.7.1	Processo di Bernoulli	82
2.7.2	Processo Binomiale	82
2.7.3	Processo di Poisson	83
2.8	Funzione di Distribuzione Cumulativa	90
2.8.1	Variabili Aleatorie Discrete	91
2.8.2	Variabili Aleatorie Assolutamente Continue	93
2.8.3	Proprietà della Funzione Cumulativa	100
2.9	Modelli per Tempi di Attesa di Poisson: Famiglia delle Gamma	103
2.9.1	Tasso di Guasto in un Processo di Poisson: Variabile Aleatoria Esponenziale	106
2.9.2	Perdita di Memoria dell'Esponenziale	108
2.10	Sommario Variabili Aleatorie Unidimensionali	109
2.11	Vettori Aleatori Continui	111
2.11.1	Densità e Variabili Aleatorie Indipendenti	112
2.11.2	Funzioni di Vettori Aleatori Continui	113
2.11.3	Densità di Funzioni di Vettori Aleatori Assolutamente Continui	117
2.11.4	Tempi di Interarrivo in un Processo di Poisson	120
2.12	Sommario Vettori Aleatori Bidimensionali	123
2.13	Catene di Markov	125
2.13.1	Equazioni di Chapman-Kolmogorov	129
2.14	Esercizi	130
3	Parametri Caratteristici di Variabili Aleatorie	137
3.1	Valore Atteso	137
3.1.1	Proprietà del Valore Atteso	139
3.2	La varianza	143
3.2.1	Proprietà della Varianza	145
3.2.2	Valore Atteso e Varianza di Distribuzioni Particolari	147
3.2.3	Informazioni sulle Code della Distribuzione	149
3.3	Covarianza	152
3.3.1	Casi particolari	154
3.3.2	La Migliore Approssimazione Lineare	155
3.4	Ordinamento Stocastico	157
3.5	La Media Aritmetica e la Legge dei Grandi Numeri	159
3.5.1	La Frequenza Relativa	161
3.6	Grandi Deviazioni	162
3.7	Esercizi	164

4	Funzione Caratteristica e Teorema del Limite Centrale	169
4.1	Funzione Caratteristica	169
4.1.1	Esempi di Funzioni Caratteristiche	171
4.1.2	Funzione Caratteristica, Valore Atteso e Varianza	174
4.2	Il Teorema del Limite Centrale	175
4.3	La Variabile Aleatoria Normale	178
4.3.1	Distribuzioni Derivate da Distribuzioni Gaussiane	181
4.4	Approssimazioni di una Distribuzioni Binomiale: Correzione di Continuità	188
4.5	Esercizi	192
5	Distribuzioni Condizionate	197
5.1	Valore Atteso Condizionato di una Variabile Aleatoria	197
5.1.1	Variabili Aleatorie Indipendenti	205
5.2	Distribuzioni Normali Bivariate	205
5.3	Esercizi	208
6	Elementi di Statistica Descrittiva	211
6.1	Analisi Esplorativa dei Dati Unidimensionali	211
6.1.1	Elaborazione dei dati: Frequenze, Diagramma e Istogramma	212
6.1.2	Sintetizzare i Dati: Indici Statistici	222
6.1.3	Percentili, Quartili e Boxplot	231
6.2	Analisi Esplorativa dei Dati Bivariati	234
6.3	Esercizi	239
7	Simulazione di un Campione	241
7.1	Metodo della Trasformata Inversa. Tutto si riconduce ad una Uniforme.	241
7.1.1	Simulazione di una Distribuzione Esponenziale	243
7.1.2	Simulazione di una Variabile Aleatoria Discreta	245
7.1.3	Simulare una Distribuzione Binomiale $B(n,p)$	247
7.1.4	Simulare una Variabile di Poisson	249
7.2	Metodo del Rigetto	251
7.3	Simulare un Processo Stocastico	254
7.3.1	Processo di Bernoulli	254
7.3.2	Processo Binomiale	254
7.3.3	Processo di Poisson	255
7.4	Passeggiata Aleatoria	257
7.5	Riscaldamento della Passeggiata Aleatoria Semplice	260
7.6	Esercizi	262

8	Introduzione alla Statistica Matematica	265
8.1	Il Campione Aleatorio	265
8.2	Statistiche e stimatori	269
8.3	Proprietà asintotiche degli stimatori	274
8.4	Stimatori di Massima Verosimiglianza	276
8.5	Intervalli di Fiducia	285
8.5.1	Intervallo di fiducia per il valore atteso di una normale con varianza nota	286
8.5.2	Intervallo di fiducia per il valore atteso di variabile aleatoria. Grandi campioni.	287
8.5.3	Intervallo di fiducia per il valore atteso di una normale con varianza incognita. Piccoli campioni. . .	292
8.5.4	Intervallo di Fiducia per la Varianza di una Normale	296
8.6	Stimatori di Bayes	300
8.7	Esercizi	304
9	Verifica di ipotesi	311
9.1	Introduzione alla Verifica d'Ipotesi	311
9.2	Migliore Regione Critica	316
9.3	Il Metodo del Rapporto di Verosimiglianza (LR Test)	323
9.3.1	Verifica di Ipotesi sulla Media di una Popolazione Normale	324
9.3.2	Confronto delle Medie di due Popolazioni Normali .	329
9.4	Un Test di Adattamento: il Test χ^2	334
9.5	Il Test χ^2 di Indipendenza	343
9.6	Esercizi	347
A	Elementi di Teoria della Misura di Lebesgue	351
A.1	Anelli, Algebre e σ -Algebre	351
A.1.1	La σ -algebra di Borel su \mathbb{R}	353
A.2	Estensione di una Misura di Probabilità	355
B	Integrali	357
B.1	Integrali Multipli	357
B.2	Integrali Impropri	359
C	Impariamo a contare	361
C.1	Estrazione con Rimpiazzo	361
C.2	Estrazione senza Rimpiazzo	361
D	Quadro delle Distribuzioni	363

E	Tavole delle Distribuzioni	365
E.1	Funzione Cumulativa di una Normale Standard	366
E.2	Quantili $\chi_{n;\alpha}^2$	367
E.3	Quantili $t_{n;\alpha}$	368
E.4	Quantili $F_{k,m}$ di ordine $\alpha = 0.95$	369
E.5	Quantili $F_{k,m}$ di ordine $\alpha = 0.975$	370
	Riferimenti bibliografici	373
	Indice analitico	375