
Prefazione

*“L’ordre est le plaisir de la raison:
mais le désordre est le délice de l’imagination.”*

Paul Claudel (1868 - 1955)

Questo libro contiene un compendio elementare della matematica necessaria per costruire modelli matematici sottostanti ad inferenze statistiche. Esso va quindi inteso più come una guida alla lettura di trattati più autorevoli, che come un ulteriore trattato sull’argomento.

Il bisogno di scrivere questo volume è derivato dalla necessità espressa più volte dagli studenti dei nostri corsi di disporre di una guida allo studio di testi più importanti di cui la letteratura è piena (nei riferimenti bibliografici si indicano solo alcuni testi ormai classici e quindi facilmente accessibili).

Il libro è destinato agli studenti delle lauree triennali in discipline scientifiche, ed in particolare in Matematica, Matematica per le Applicazioni, Fisica, Ingegneria, Economia, Scienze Statistiche, Informatica.

Un aspetto importante dell’approccio qui utilizzato è quello di una “matematica superiore da un punto di vista elementare”, al fine di evitare inutili gradienti metodologici a chi in seguito voglia dedicarsi allo studio di corsi più avanzati nell’area della Probabilità e della Statistica Matematica. Ne consegue che, pur non prevedendo corsi propedeutici di teoria della misura e dell’integrazione, da un punto di vista formale si fa ricorso alla terminologia abitualmente impiegata in tali corsi, lasciando alle Appendici un’introduzione a tali argomenti, nel modo più elementare possibile. Le uniche oggettive propedeuticità sono quelle di un corso elementare di calcolo differenziale ed integrale. Non è, invece, prevista alcuna conoscenza pregressa nel campo della Probabilità e della Statistica Matematica.

Sempre allo scopo di evitare prematuri conflitti di impostazione, si è preferito fare riferimento alla impostazione di Kolmogorov, lasciando a corsi superiori la presentazione di altri importanti approcci, allorché lo studente sia in grado di meglio apprezzarne e discuterne i fondamenti concettuali, disponendo di un bagaglio matematico più adeguato.

Lo stile adottato è quello di introdurre le distribuzioni classiche di variabili aleatorie attraverso la esplicita costruzione dei modelli matematici che le hanno motivate.

Tradizionalmente i concetti fondamentali del Calcolo delle Probabilità vengono illustrati facendo riferimento ai giochi, come il lancio di dadi, l'estrazione di carte, ecc., utilizzando metodi del calcolo combinatorio, adeguati allo studio di modelli probabilistici equiprobabili. Sebbene questi modelli siano importanti nella presentazione dei primi concetti, in questa guida si è cercato molto presto di far notare che il modello equiprobabile è solo un primo esempio di modello probabilistico, partendo dal quale si possono generare una grande varietà di modelli molto più significativi per le diverse applicazioni.

I capitoli dedicati alla Statistica offrono una prima panoramica dei metodi classici utilizzati nelle applicazioni, lasciando, anche qui, a corsi superiori il compito di una trattazione più accurata.

Più specificamente, nel Capitolo 1 viene introdotta la struttura matematica degli spazi di probabilità, e quindi il concetto di probabilità condizionata. Si mette qui in evidenza l'importanza di questo concetto, in quanto esso caratterizza il calcolo delle probabilità rispetto ad una semplice applicazione della teoria della misura; conseguenza immediata è la nozione di indipendenza di eventi aleatori.

Nel Capitolo 2 viene introdotto il concetto di variabile aleatoria e di vettore aleatorio di dimensione finita. Viene altresì offerta un'introduzione elementare ai processi stocastici come generiche famiglie di variabili aleatorie. Particolare attenzione è dedicata al processo di Bernoulli, al processo Binomiale, al processo di Poisson ed ai legami che intercorrono tra di loro. Ciò consente di introdurre le più importanti famiglie di distribuzioni di probabilità, sia nel caso discreto, che nel caso assolutamente continuo, trascurando a questo livello il caso di distribuzioni più complesse. L'introduzione alle catene di Markov va intesa più come un esercizio sui concetti sopra esposti che una trattazione estesa della teoria.

Il Capitolo 3 è dedicato alla discussione sui parametri caratteristici delle distribuzioni di probabilità, e si fornisce una prima presentazione della

legge dei grandi numeri, accanto ad un risultato elementare sulle grandi deviazioni.

Nel Capitolo 4 si introducono le funzioni caratteristiche, quale strumento autorevole per trattare, tra l'altro, il problema della somma di variabili aleatorie indipendenti e, quindi, per dimostrare il Teorema Centrale del Limite, che a sua volta consente l'introduzione della distribuzione normale.

Il Capitolo 5 è dedicato all'introduzione delle distribuzioni condizionate, per il caso continuo ancora in modo non del tutto rigoroso.

Disponendo così di metodi probabilistici adeguati, ed in particolare della Legge dei Grandi Numeri e del Teorema Centrale del Limite, si passa ai capitoli dedicati alla Statistica Matematica.

Nel Capitolo 6 si presentano i metodi più comuni per la descrizione dei dati sperimentali, introducendo le statistiche fondamentali come descrittori sintetici della "forma" della distribuzione sperimentale di campioni di variabili aleatorie.

Nel Capitolo 7 si offrono dei metodi elementari per la simulazione di variabili aleatorie e di processi stocastici. Abbiamo fatto uso del software MatLab¹, presupponendo, però, una minima conoscenza di tale software da parte del lettore. Particolare attenzione viene dedicata alla simulazione della passeggiata aleatoria semplice, facendo peraltro notare come un adeguato riscaldamento della stessa conduca alla simulazione delle traiettorie di un processo di Wiener (moto Browniano); questo si somma ad un cenno dato nel paragrafo dedicato alle catene di Markov nel Capitolo 2, dove si era fatta notare, con argomentazioni euristiche, la convergenza della legge di transizione di una passeggiata aleatoria semplice, opportunamente riscalata, alla legge di transizione di un processo di Wiener.

Nel Capitolo 8 si introducono i concetti fondamentali della statistica parametrica, con le proprietà qualificanti degli stimatori; si discute degli stimatori di massima verosimiglianza e si forniscono intervalli di fiducia basati sulle statistiche più comunemente utilizzate nelle applicazioni.

Infine, nel Capitolo 9 si fornisce una prima presentazione dei concetti fondamentali dei metodi matematici nella verifica di ipotesi. Particolare attenzione viene dedicata al Lemma di Neyman-Pearson e, quindi, al metodo del rapporto di verosimiglianza, anticipando negli esempi i metodi della analisi della varianza. Si fornisce anche una dimostrazione

¹ Matlab è un marchio registrato da The MathWorks, Inc.

elementare dei teoremi di convergenza alla base dei test del chi quadro, lasciando intuire risultati più generali della teoria sul comportamento asintotico del rapporto di verosimiglianza.

Il libro contiene una quantità significativa di esempi svolti ed esercizi a corredo della presentazione, in modo da favorire la verifica della comprensione del materiale presentato nei diversi capitoli. L'introduzione a metodi di simulazione di esperimenti aleatori può ancora aiutare lo studente nella "verifica sperimentale" di alcuni risultati teorici.

Come diceva un grande autore, non ci sarebbero errori da correggere se non ci fosse il libro. Gli autori saranno grati a tutti i lettori che vorranno segnalare omissioni e, naturalmente, errori di qualsiasi natura.

Eventuali segnalazioni possono essere inviate via posta elettronica direttamente agli autori. Sul sito web di questo volume presso la Società Editrice Esculapio,

<http://www.editrice-esculapio.it/capasso-morale/>,

è possibile accedere a tutti gli errata segnalati, oltre ad eventuali addenda.

Gli autori desiderano ringraziare tutti coloro, ed in particolare gli studenti del Corso di Laurea in Matematica della Università degli Studi di Milano, che hanno contribuito in modo diretto o indiretto allo sviluppo del materiale qui presentato. VC desidera ringraziare DM per lo stimolo a presentare tale materiale per la prima volta in una forma organica. A sua volta DM desidera ringraziare VC per averle offerto l'opportunità di condividere la gioia della discussione su questi importanti capitoli della matematica.

Entrambi ringraziano i propri cari per la pazienza mostrata durante la lunga preparazione di questo volume.

Per concludere gli autori ringraziano Giampaolo Parenti della Società Editrice Esculapio per il continuo incoraggiamento a condurre in porto questa non banale impresa.

Milano, Luglio 2009

Gli Autori