

VERITÀ, ADEGUATEZZA DI CONTENUTI, STIMOLI, STILE IN MESSAGGI AGLI INSEGNANTI DI MATEMATICA

GABRIELE LUCCHINI ¹

0.1 Questa breve nota, redatta per la "giornata di studio dedicata a FRANCESCO SPERANZA in occasione del suo 65° compleanno", è destinata:

- a) al festeggiato;
- b) a coloro che professionalmente rivolgono lezioni, note, libri o altri materiali — indicati nel titolo come **messaggi** ² — agli insegnanti di Matematica ³, in formazione o in servizio;
- c) ai predetti insegnanti, anche in relazione alla loro attività didattica.

0.2 L'obiettivo è quello di stimolare, anche per reazione e sia negli autori sia nei fruitori, riflessioni su quattro aspetti di messaggi del tipo predetto;

- a) **verità, falsità, opinabilità** di affermazioni o in affermazioni (cfr. § 1);
- b) **adeguatezza di contenuti** rispetto a ciò che è opportuno proporre per la conoscenza dell'argomento (cfr. § 2);
- c) varietà di **stimoli** che possono essere inseriti nei messaggi (cfr. § 3);
- d) opportunità o inopportunità nello **stile** dell'esposizione (cfr. § 4).

0.3 La limitazione a sei pagine non consente di sviluppare tutti gli aspetti segnalati, né di dare riferimenti sistematici sulla **comunicazione**, in particolare sui **disturbi**, né di soffermarsi su altri elementi che, per quanto importanti, non sono, qui, tra i principali ⁴.

0.4 Come parole-chiave indico quelle evidenziate in grassetto minuscolo.

¹ Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.

Lavoro svolto nell'ambito di attività collegate a finanziamenti MURST.

I riferimenti alla classificazione *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, nella versione pubblicata sul *Supplemento al Notiziario della Unione Matematica Italiana* n. 8-9 del 1977, possono essere: 1.6 e 10.1.

Non pare necessario soffermarsi sulle evidenziazioni con diversificazione di caratteri (al di fuori di quelle segnalate in § 0.4), ottenuta con EMT_EX, e sulla utilizzazione della numerazione decimale delle sezioni (senza titoli) per evidenziare la struttura dell'esposizione.

² Uso **messaggi** (piuttosto che comunicazione o segno) per indicare ciò che è realizzato dall'autore, complessivamente o in una parte compiuta in relazione alle considerazioni successive.

Il termine **messaggio** non è, quindi caricato di significati particolari, come, ad esempio, nel ben noto *Il medium è il messaggio*, che MARSHALL McLUHAN (1911-1980) ha utilizzato come titolo, prima di un capitolo de *Gli strumenti del comunicare* (Milano, Il Saggiatore, 1967 - ed. or. 1964), poi di un libro (con QUENTIN FIORE, Milano, Feltrinelli, 1968 - ed. or. 1967).

³ Non considero le possibilità di adattamento a altre discipline o a altri destinatari matematici.

⁴ Per una presentazione, in parte datata, di problemi della comunicazione segnalo il mio testo *L'insegnamento della Matematica e le nuove metodologie*, II ed., Ferrara, Corso, 1983.

Su aspetti particolari segnalo:

a) *Matematica per gli insegnanti di Matematica* di FRANCESCO SPERANZA, Bologna, Zanichelli, 1983;

b) *Insegnare la Matematica nella scuola elementare* di FRANCESCO SPERANZA, DANIELA MEDICI CAFFARRA e PASQUALE QUATTROCCHI, Bologna, Zanichelli, 1986.

1.1 Per indicare gli aspetti, che, qui, interessano su **verità, falsità, opinabilità**, propongo i seguenti cinque esempi:

- a) RENE DESCARTES (1596-1650) ha pubblicato *La géométrie* (in francese e anonima) nel 1637 insieme ("plus") al *Discours de la methode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences*;
- b) la somma degli angoli di un qualsiasi triangolo è 180° ;
- c) KURT GÖDEL (1906-1978) era austriaco⁵;
- d) K. GÖDEL è stato il più grande matematico del ventesimo secolo;
- e) per il cosiddetto problema dei quattro colori la dimostrazione rigorosa manca ancora⁶.

1.2.1 La veridicità della prima affermazione può essere controllata, almeno in parte, su varie fonti (libri di storia della Matematica o della Filosofia, enciclopedie, saggi su R. DESCARTES, ..., riproduzione del frontespizio).

1.2.2 La veridicità della seconda affermazione è subordinata a due condizioni (che il contesto può consentire di non enunciare):

- a) che il triangolo sia piano;
- b) che si faccia riferimento alla geometria euclidea.

1.2.3 In quale senso può essere vero che K. GÖDEL era austriaco? per quale periodo della sua vita?

- a) che è nato nel territorio dell'impero austro-ungarico [Brünn (Brno) in Moravia]?
- b) che ha preso la cittadinanza austriaca nel 1929 (prima di prendere quella degli U.S.A nel 1948), dopo aver rinunciato a quella cecoslovacca?

1.2.4 Per l'affermazione d di § 1.1, riportata come valutazione attribuita a altri, ho visto negare la lode in sede di laurea in Matematica.

1.2.5 L'affermazione e di § 1.1 è corretta se anteriore alla dimostrazione, comunicata il 26 luglio 1976 (KENNETH APPEL e WOLFGANG HAKEN).

1.3.1 Un aspetto importante, in particolare dal punto di vista matematico, è quello della **motivazione** o della **dimostrazione** delle affermazioni.

1.3.2 Qui, chiaramente, il discorso può essere collegato a quello che viene abitualmente chiamato il **rigore matematico**.

1.3.3 Significativi spunti di riflessione sul rigore matematico sono offerti dalla seguente affermazione di GIUSEPPE PEANO (1858-1932):

"Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell'affermare tutte cose vere, e nel non affermare cose che sappiamo non vere. Non sta nell'affermare tutte le verità possibili. La scienza, o la verità, è infinita;

⁵ Cfr., ad esempio, *La filosofia della matematica del '900* di ETTORE CASARI [Firenze, Sansoni, 1983, pag. 21: "ottenuto nel 1931 dall'austriaco Kurt Gödel (n. 1906)"] e *Storia della matematica* di CARL B. BOYER (Milano, ISEDI, 1975, pag. 695: "raggiunta nel 1931 da un giovane matematico austriaco, Kurt Gödel, emigrato negli Stati Uniti e divenuto membro dell'Institute for Advanced Studies di Princeton"; ed. or. Wiley, 1968, pag. 655: "on the part of a young Austrian mathematician, Kurt Gödel, who had emigrated to the United States and became member of the Institute for Advanced Studies at Princeton").

⁶ Cfr., ad esempio, "Matematica ricreativa" di MICHELE CIPOLLA, *Enciclopedia delle matematiche elementari*, vol. III parte II, Milano, Hoepli, 1950, pag. 528: "Non si conoscono carte che richiedano più di quattro colori; ma la dimostrazione rigorosa della sufficienza, in ogni caso, di quattro colori manca ancora".

noi non ne conosciamo che una parte finita, e infinitesima rispetto al tutto. E della scienza che conosciamo, noi dobbiamo insegnare solo quella parte che è maggiormente utile agli alunni.”⁷

1.3.4 L'affermazione di G. PEANO è riportata in scritti di vari Autori⁸ e è interessante osservare le differenze nelle citazioni⁹.

1.3.5 È, anche, interessante osservare che LUIGI BRUSOTTI (1877-1959), in “Questioni didattiche” (*Enciclopedia delle matematiche elementari*, vol. III parte II, Milano, Hoepli, 1950, pag. 892) cita un altro (precedente) brano di G. PEANO:

“Così [...] il difetto di rigore in lavori di matematica non si può, a nostro modo di vedere, in alcun modo, difendere o scusare. Noi riteniamo *falsa* una proposizione, se vi si può trovare un caso d'eccezione; e che non si possa considerare come *ottenuto* un risultato, finché esso non è rigorosamente provato, ancorché non si conoscano casi di eccezione.”¹⁰

1.3.6 L'affermazione di G. PEANO suggerisce, innanzitutto, importanti riflessioni sul concetto di verità in Matematica, anche perché, essendo in una rivista del 1910, è ben successiva alla famosa definizione, che BERTRAND RUSSELL (1872-1970) aveva dato nel 1901:

“*Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.*”¹¹

⁷ “Sui fondamenti dell'analisi”, *Opere scelte*, vol. III, Roma, Cremonese, 1957; il brano è a pag. 275; a pag. 273 è indicato che il lavoro è tratto dal *Bollettino della “Mathesis” Società italiana di matematica*, anno II, giugno 1910, pagg. 31-37.

⁸ In particolare: MODESTO DEDÒ (cfr. nota 9), MARIO MARCHI (cfr. nota 9), VINICIO VILLANI (“Rigore e significato in Matematica”, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, maggio/giugno 1993, con l'indicazione “Conferenza tenuta [...] in memoria di Modesto Dedò” e con collegamento dichiarato alla citazione di G. PEANO riportata da MO. DEDÒ).

⁹ a) MARIO MARCHI, nel riportare l'indicazione in “Rigore e verità nell'insegnamento della matematica” [*Atti del Convegno Internazionale “Cultura Matematica e Insegnamento” nel decimo anniversario della scomparsa di Luigi Campedelli (30, 31 Maggio, 1 Giugno 1988)*, Università degli Studi di Firenze, Istituto Matematico “Ulisse Dini”, pag. 72], arresta la citazione a “possibili”;

b) MODESTO DEDÒ (1914-1991), nel riportare l'indicazione ne “Il rigore nell'insegnamento preuniversitario” (*L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, maggio/giugno 1993, pag. 462; a pag. 461 è indicato che si tratta di una conferenza tenuta il 12.10.1988), non indica la data, ma riporta, in più: “... Parimenti, ogni dimostrazione esprime una verità di un altro ordine... Se la dimostrazione è complicata, noi possiamo tacere questa verità.”

¹⁰ “Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente”, che è “Su alcuni indirizzi delle investigazioni geometriche” di CORRADO SEGRE (1863-1924), *Rivista di matematica*, 1891, pagg. 66-69; il brano di G. PEANO è a pag. 66.

L. BRUSOTTI non riporta la prima frase e non usa il corsivo per *falsa* e *ottenuto*.

Gli accenti acuti (al posto di quelli gravi) sono della trascrizione.

¹¹ In “Recent Work on the Principles of Mathematics”, *International Monthly*, luglio 1901, pag. 84. “[...] la definizione paradossale di BERTRAND RUSSELL: «Le matematiche sono quella scienza in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se quello che si dice sia vero.»” [FEDERIGO ENRIQUES (1871-1946), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli, 1938, pag. 141].

Ma anche questo discorso non è, qui, prioritario: per verità può bastare l'accezione usata da G. PEANO ¹².

1.3.7 In relazione a **verità, falsità, opinabilità**, nell'affermazione di G. PEANO interessa, anche, cogliere l'indicazione di due aspetti:

- a) l'onestà dell'autore verso la scienza, onestà che si può dire intellettuale;
- b) l'onestà dell'autore verso i destinatari, onestà che si può dire morale.

1.3.8 Voglio, però, aggiungere che, spesso, in messaggi ci possono essere anche **opinioni** (interpretazioni o valutazioni soggettive), pur affascinanti e suggestive, ma senza il carattere di verità indicato da G. PEANO.

1.3.9 Nel titolo ho messo **falsità** (e forse, sarebbe stato più chiaro, anche se pesante, parlare di **menzogne**) per evidenziare il fatto che "l'affermare cose che sappiamo non vere" non può essere considerato un **errore**, nel senso corrente del termine. Tuttavia, va tenuto presente che affermazioni false possono essere il risultato di **sviste**, anche solamente grafiche, senza, però, dimenticare che, molto spesso, lettori o ascoltatori non possono non soltanto distinguere tra menzogne e sviste ma neppure rendersi conto delle falsità, a meno di controlli, che, abitualmente, si fanno solo in casi particolari: ad esempio, quanti controllerebbero i due "1988" della nota 9, se non per utilizzarli in un successivo messaggio?

1.3.10 Per evitare equivoci, osservo che le considerazioni possono essere ben diverse per la ricerca: si può essere d'accordo con C. SEGRE nell'affermazione non condivisa da G. PEANO (cfr. § 1.3.5 e nota 10):

"Allo stesso modo come, allorché si tratta di scoprire una verità, la purezza del metodo passa in seconda linea, così accade spesso che in una prima ricerca si debba sacrificare (sacrificio molto più grave, trattandosi di matematica!) il rigore ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Non si confonda la deficienza di rigore nei procedimenti con l'errore nei ragionamenti o nei risultati. [...]

Ma la questione del rigore, di cui sopra discorro, è ben diversa." ¹³.

1.3.11 E è senz'altro opportuno riflettere, anche in questo contesto, su un'altra affermazione di C. SEGRE:

"L'abbondare nell'uso dell'intuizione [...] non è peccare *di rigore* [...]. [...]

Ma vi è luogo anche, per ragioni didattiche, a mancare veramente di rigore, a dare cioè in iscuola degli *abbozzi di ragionamento* invece, oppure prima dei veri ragionamenti. Un tale abbozzo, o *dimostrazione non rigorosa* potrà insegnare *in che modo si fanno le scoperte*, come si lavora coll'*intuizione*; oppure servirà a dare un'idea *più sintetica*, più facile a ricordare [...]. *Basta che si avvertano gli scolari* che la dimostrazione esposta è incompleta; e talvolta si mostri dove è la lacuna. [...]" ¹⁴.

¹² La bibliografia su verità è molto vasta; per gli aspetti, che, qui, hanno particolare interesse, segnalo la sezione 1 di "Verità e comunicazione nell'insegnamento (della Matematica)" di NAZARENO TADDEI, *EDAV*, ottobre-novembre 1985, pagg. 9-15.

¹³ Articolo citato nella nota 10; il brano e la nota di C. SEGRE sono a pag. 53.

¹⁴ "Essenza e didattica delle Matematiche in un manoscritto inedito di Corrado Segre" di FRANCESCO TRICOMI (1897-1978), *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Torino*, 7 (1938-1940; lettura del 22/2/1940), pagg. 101-117; il brano è a pag. 112; a pag. 103 è scritto che il libretto è "uno dei più recenti" (rispetto al 1924, anno della morte di C. SEGRE).

1.3.12 Sull'intuizione riporto, anche, una significativa affermazione di HENRI POINCARÉ (1854-1912):

*"Le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit, et parmi elles l'intuition n'est pas la moins précieuse. C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel [...]"*¹⁵.

2.1 Anche le considerazioni, che interessano sulla **adeguatezza di contenuti**, sono collegabili alla affermazione di G. PEANO riportata in § 1.3.3:

a) da una parte c'è il problema delle conoscenze dell'autore;
b) dall'altra quello della selezione della "parte della scienza" da proporre, sulla base del "maggiormente utile" ai destinatari o di altri criteri.

2.2 Il primo problema di § 2.1 porta a riflettere sull'impegno a conoscere di chi vuol proporre messaggi e non richiede, qui, particolari considerazioni.

2.3.1 L'altro problema di § 2.1 sollecita a prendere in considerazione i **destinatari**, anche in relazione agli **obiettivi** fissati per la trattazione (che possono andare ben al di là dell'utile).

2.3.2 Non interessa, qui, un inventario sistematico di possibili obiettivi; basta aver presente la possibilità di grande varietà, dall'informare allo stimolare, dal dare suggerimenti al presentare proposte.

2.3.3 Pensando a destinatari e obiettivi è possibile operare ragionevolmente per l'adeguatezza delle scelte di:

a) selezione dei contenuti da proporre sull'argomento;
b) livello di trattazione, in particolare prerequisiti e capacità, che si chiedono al lettore o all'ascoltatore.

2.4.1 Aggiungo, soltanto, la segnalazione di due problemi, che si riscontrano abbastanza frequentemente:

a) **reperibilità** delle fonti alle quali si rimanda¹⁶;
b) **spendibilità** dei dati o delle indicazioni.

2.4.2 Sui rimandi mi limito a segnalare l'opportunità che la loro ricerca sia giustificata dalla qualità o dalle dimensioni della fonte (non surrogabile con una citazione).

2.4.3 Sulla spendibilità mi limito a un esempio, che mi sembra superfluo commentare: come è ben noto, il programma di Matematica della scuola media (Decreto ministeriale 9 febbraio 1979) al tema 3 indica "affermazioni del tipo vero/falso e affermazioni di tipo probabilistico [...]".

2.5 Riconsideriamo l'affermazione *a* di § 1.1: in un particolare messaggio per precisi destinatari, quali informazioni si possono ritenere superflue? ci sono informazioni, che può essere opportuno aggiungere (ad esempio, che R. DESCARTES e CARTESIO sono lo stesso autore)? su quali può essere opportuno dare elementi per andare oltre la notizia o per prevenire, indirizzare o suscitare curiosità più o meno prevedibili o significative?

¹⁵ "La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement", *Œuvres*, Paris, Gauthier-Villars, t. XI, 1956, pagg. 129-133; il brano è a pag. 132; a pag. 129 è indicato che il testo è tratto da *L'enseignement mathématique*, 1889, pagg. 157-162.

¹⁶ Ricordo che per le indicazioni bibliografiche ci sono norme UNI (Ente Italiano di Unificazione) e norme ISO (*International Standardization Organisation*), spesso dimenticate.

3.1.1 Anche se implicita nelle considerazioni di § 2.3.1, ritengo opportuno segnalare esplicitamente l'importanza di riflettere sulla varietà di **stimoli**, che si possono offrire al lettore o all'ascoltatore, sia per la piena comprensione del particolare messaggio, sia per la individuazione delle componenti metodologiche riutilizzabili (scelta di contenuti, struttura e sua evidenziazione, ad esempio, con la numerazione decimale delle sezioni, soluzioni grafiche, ...).

3.1.2 Le indicazioni di tipo metodologico possono essere viste, anche, soltanto come conseguenza dell'impostazione adottata (con atteggiamento del tipo: il lettore capisca quello che ho voluto indicare!), ma varie esperienze mostrano che è, spesso, opportuno un **insegnamento esplicito**, anche per orientare in quello che è stato chiamato "imparare a imparare".

3.2.1 Ad esempio, la considerazione sistematica degli aspetti significativi della trattazione di un particolare argomento potrà bastare per sollecitare a analogo atteggiamento per altri argomenti o sarà opportuno un esplicito invito collegato al caso particolare in oggetto?

3.2.2 Quanto è ragionevole fare e segnalare omissioni o errori per stimolare a individuarli?

3.2.3 Come stimolare a cercar di vedere, anche, quanto non si "immagina di trovare"?

4.1 È già stato sfiorato, almeno in parte, il problema dello **stile**, che, qui, interessa segnalare per quanto riguarda opportunità e inopportunità in relazione a:

- a) **genere del messaggio;**
- b) **strategia dell'esposizione;**
- c) **scelta di strumenti o di accorgimenti grafici;**
- d) **rigore linguistico, anche in relazione alla settorializzazione dei linguaggi;**
- e) **aspetto di testimonianza.**

4.2 Sul genere del messaggio ritengo sufficiente invitare a intenderlo nel senso suggerito dalle abituali considerazioni sui generi letterari.

4.3 Sulle strategie dell'esposizione mi limito a segnalare il collegamento con gli obiettivi (cfr. § 2.3.2) e la possibilità di puntare su aspetti razionali o su aspetti emotivi.

4.4 Sugli strumenti (non necessariamente visti soltanto come sussidi) in epoca di multimedialità non pare necessario soffermarsi, come sugli accorgimenti grafici in epoca di composizione e elaborazione elettronica di testi.

4.5 Anche sul rigore linguistico, con implicazioni di chiarezza, precisione e uniformità, pare sufficiente la segnalazione.

4.6 Sull'aspetto di testimonianza, che può portare a varie considerazioni, mi limito a segnalare due geniali intuizioni (rispetto a quanto, qui, interessa):

- a) "lo stile è l'uomo" ("*le style c'est l'homme même*") di GEORGES-LOUIS LECLERC, *comte de Buffon* (1707-1788)¹⁷;
- b) "il medium è il messaggio" di M. MCLUHAN, già citata, in altro contesto, nella nota 2.

¹⁷ In *Discours sur le style* (1753); non avendo ritrovato la mia prima fonte, rimando a *Britannica CD 2.02*, Encyclopædia Britannica Inc., 1995.