4.3.5.1 Va, poi, osservato che, nella sua introduzione, David Hilbert pone il problema della considerazione di

caratteristiche necessarie o auspicabili

per i sistemi di assiomi, usando *"completo"* e *"semplice"*; nella trattazione si occupa di *"non-contraddittorietà"* e di *"indipendenza"*.

4.3.5.2 Senza seguire la trattazione di David Hilbert e senza dare una trattazione sistematica delle caratteristiche dei sistemi di assiomi, richiamo l'attenzione su tre fatti:

- la non–contraddittorietà degli assiomi è una caratteristica indispensabile per l'accettabilità delle deduzioni [18];
- l'indipendenza degli assiomi non è indispensabile e in certi casi può addirittura essere più comodo usare assiomi sovrabbondanti; tuttavia, la questione dell'indipendenza è significativa per varie considerazioni;
- il contesto della ricostruzione della Geometria euclidea fa pensare a una completezza degli assiomi per la deducibilità di proposizioni note (o, almeno, dimostrabili), ma il termine completo è precisabile in relazione al teorema di Kurt Gödel, richiamato in § 4.3.1.3, nel seguente modo da lui indicato [19]:

  Un sistema formale si dice completo
  se ogni proposizione esprimibile con i suoi simboli
  è formalmente decidibile a partire dagli assiomi,
  vale a dire se per ogni proposizione A *di quel tipo*
  esiste una catena deduttiva finita
  che si sviluppa secondo le regole del calcolo logico
  la quale comincia con certi assiomi e finisce
  o con la proposizione A *o con la proposizione* non-A.

---

[18] Ovviamente, eventuali contraddizioni possono non avere conseguenze su parti della teoria dedotta dagli assiomi.

[19] *"Appendice agli 'Atti del secondo Convegno di epistemologia delle scenze esatte' di Königsberg"* in *La filosofia della matematica del '900* di Ettore Casari, Firenze, Sansoni, 1973, pag. 55.

4.3.6.1 La citazione di KURT GÖDEL riportata in § 4.3.5.2 consente di indicare in che cosa consiste il risultato trovato da questo Autore nella forma da lui esposta nella prosecuzione del testo riportato, nel quale fa riferimento al suo articolo *"Su proposizioni formalmente indecidibili dei Principia mathematica e di sistemi affini"* (*Monatshefte für Mathematik und Phisik*, XXXVIII).

Un sistema S *si dice*
completo rispetto a una certa classe K *di proposizioni*
se per lo meno tutte le proposizioni di K
sono deducibili a partire dagli assiomi di S*.*
Ciò che viene mostrato nel lavoro citato
è che non esiste alcun sistema con un numero finito di assiomi
che sia completo anche soltanto rispetto
alle proposizioni aritmetiche; [...].

4.3.6.2 Senza soffermarmi sugli sviluppi delle ricerche [20], ricordo che il progetto per la fondazione della Matematica secondo le idee di DAVID HILBERT viene indicato come *"programma hilbertiano"* (già ricordato in § 4.3.1.3).

4.3.7.1 Con il passaggio ai sistemi ipotetico–deduttivi di tipo moderno nasce il problema della utilizzabilità (o applicabilità) della Matematica nell'ordine di idee indicato da ALBERT EINSTEIN nella citazione di § 4.3.3.8: se *"Gli assiomi sono creazioni volontarie della mente umana"*, se i teoremi non sono sicuri rispetto alla *"realtà"*, perché utilizzare la Matematica?

4.3.7.2 Come è ben noto, GALILEO GALILEI ha affermato che la natura *"è scritta in lingua matematica"* (cfr. #4.3/3-153), ma quando della Matematica si aveva un'idea diversa da quella alla quale si è poi pervenuti [21].

→ #4.3/3-153: citazione di GALILEO GALIEI

4.3.7.3 Il problema può essere formulato con il titolo di un articolo del 1960 e con quello di un libro del 1990.

---

[20] Rimando, in particolare, ai testi citati alla nota 15.

[21] Erano, anche, limitate le conoscenze di strumenti matematici per descrivere e interpretare la realtà.