Spunti su "The three jugs problem" e i "diagrammi di Bruno de Finetti" in un articolo di Abraham Arcavi

(Gabriele Lucchini, 2017-05-08)

L'interesse per i problemi di travasi (v. rp-trv0.htm con motore di ricerca)) mi ha portato a sviluppare alcune considerazioni sulla parte relativa a questi problemi nell'articolo "Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education" di Abraham Arcavi, pubblicato in *La Matematica nella Società e nella Cultura – Rivista della Unione Matematica Italiana* dicembre 2015, sul tema "Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica – Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà", Serie I, vol. VIII, n. 3, 500 pagine più fotografia a colori e indice, a cura di Giuseppe Anichini, Livia Giacardi, Erika Luciano.

Rendo disponibile il testo nella forma di articolo proposto per pubblicazione e non accettato, nella eventualità che a qualcuno possa interessare e che mi possano essere forniti suggerimenti.

Spunti su “The three jugs problem” e i “diagrammi di Bruno de Finetti”

GABRIELE LUCCHINI
Già docente nella Università degli Studi di Milano
E-mail: gabriele.lucchini@unimi.it
Pagine web personali: http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/gabl00.htm

Sommario: *Senza intenzioni di esaustività, vengono proposti alcuni spunti sul “problema delle tre caraffe”e sui “diagrammi di Bruno de Finetti” aggiuntivi alla trattazione di Abraham Arcavi nel numero 3 del 2015 della* Rivista della Unione Matematica Italiana.
Abstract: *Without pretending to be exhaustive, we suggest some starting points to deal with the “three jugs problem” and the "de Finetti’s diagrams”. Our contribution is additional to the dissertation by Abraham Arcavi that appears on issue n. 3, year 2015, of the* Rivista della Unione Matematica Italiana.

1. – Introduzione [1]

Nell’articolo “Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education”, pubblicato in *La Matematica nella Società e nella Cultura – Rivista della Unione Matematica Italiana* [2], Abraham Arcavi [3] considera il “problema delle tre caraffe” (“The three jugs problem”, v. § 2) [4], in particolare dal punto di vista della visualizzazione (che è l’argomento della sua trattazione) con quello che chiama “de Finetti diagram” (v. § 2 e § 6) come metodo per la risoluzione; essendomi interessato di questo argomento [5], lo rivisito volentieri per proporre alcuni spunti aggiuntivi, anche come stimolo a ulteriori proposte.

[1] In http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-trv0.htm sono riportate indicazioni per riferimenti e complementi qui segnalati con il nome del *link* nel *file* predetto.
[2] *La Matematica nella Società e nella cultura*, dicembre 2015, sul tema “Bruno de Finetti e l’insegnamento della Matematica – Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà”, Serie I, vol. VIII, n. 3, 500 pagine più fotografia a colori e indice, a cura di Giuseppe Anichini, Livia Giacardi, Erika Luciano. L’indice è, anche, in l-bdf17.doc. Sulla rivista rimando al sito internet della Unione Matematica Italiana e segnalo rp-umi10.htm. Con il n. 1 del 2016 la rivista ha la testata *Matematica, Cultura e Società*.
[3] Su A. Arcavi rimando ai dati forniti nella rivista e a quelli reperibili in internet, limitandomi a segnalare che è indicato come “Segretario generale in carica della International Commission on Mathematical Instruction” (ICMI).
[4] Il problema è noto anche con altri nomi (v. § 5).
[5] Indicazioni sono nei riferimenti bibliografici e sitografici, nel seguito abitualmente citati come bibliografia.

Il primo approccio mi fu suggerito da Carlo Felice Manara (1916-2011), che mi diede il suo articolo del 1965 "Argomenti vecchi e insegnamenti nuovi: i diagrammi triangolari" [6] e si interessò per la pubblicazione del mio articolo del 1972 "Diagrammi triangolari; risolubilità e ottimizzazione".

2. – Il problema nella trattazione di Abraham Arcavi

Per chi avesse difficoltà ad accedere al testo di A. Arcavi, o preferisse una sintesi in italiano, presento il problema e propongo indicazioni sulla trattazione nell'articolo predetto.

Il problema è il seguente: si hanno tre caraffe non graduate, rispettivamente della capacità di 8, 5, 3 litri (si noti che è 8=5+3); la prima è piena d'acqua e le altre due sono vuote; si vuole arrivare ad avere 4 litri d'acqua in ciascuna delle prime due con travasi successivi da una caraffa ad un'altra, senza fare segni sui recipienti.

A. Arcavi indica come soddisfacente la soluzione di figura 1 e pone tre domande:

-- questa soluzione è l'unica?
-- questa soluzione è la migliore?
-- si può risolvere il problema in un modo che non sia empiricamente per tentativi ("trial and error")?

Table 1. Steps of the solution for the three jugs problem

8-liter jug	5-liter jug	3-liter jug
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Figura 1

Come via per cercare risposte alle tre domande, A. Arcavi introduce quello che chiama "a ternary diagram, a barycentric diagram or a de Finetti diagram, in honor of its proposer" (p. 152) e che presenta nella sua figura 7, qui proposta come figura 2 [7].

[6] I dati sull'articolo sono in bibliografia, come quelli degli altri testi citati in relazione al problema. L'articolo e dati su C. F. Manara sono reperibili in www.carlofelicemanara.it; su C. F. Manara; segnalo, anche, cfms0.htm.

[7] C. F. Manara lo chiama "diagramma triangolare"; vengono usate, anche, altre denominazioni, (coordinate trilineari, ternary plot o diagramma ternario, …); non ne conosco una raccolta sistematica, che mi pare auspicabile.

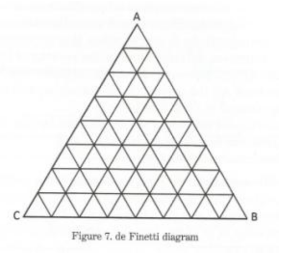


Figura 2

Questi diagrammi sono basati su quello che A. Arcavi indica come teorema di Viviani [8]:
«*In un triangolo equilatero la somma delle distanze di un punto qualunque del triangolo dai tre lati è uguale all'altezza del triangolo*.».

In figura 3 è riportata una visualizzazione della dimostrazione del teorema, tratta dall'articolo di C. F. Manara, dove è la figura 1 disegnata su una parte di un tipo di carta reperita in commercio (v. appendice 1), utilizzata anche in figure successive) [9]. Per un foglio analogo, Coxeter e Greitzer in *Geometry revisited* [10] (testo citato da A. Arcavi a p. 151 e a p. 160) usano la denominazione "triangulated paper" (p. 89).

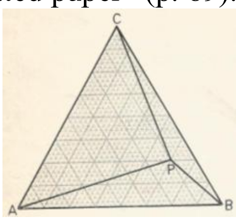


Figura 3

In figura 4 (n. 9 di A. Arcavi) è riportata la visualizzazione di quello che possiamo chiamare "parallelogrammo degli stati raggiungibili": in un triangolo equilatero di lato 8 sono prese ordinatamente le distanze da AB, AC e CB ed evidenziati i segmenti corrispondenti alle distanze 5 da AC e 3 da CB, che completano il parallelogrammo che interessa; per i tre vertici si ha C(8,0,0), B(0,8,0), A(0,0,8).

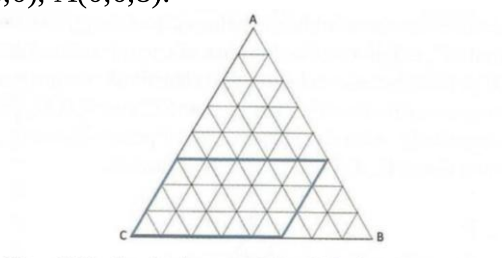


Figura 4

[8] Vincenzo Viviani (1622-1703); notizie sono reperibili anche in internet (MacTutor, …).
[9] Si noti che i triangoli piccoli non vengono utilizzati; ma ai tempi dell'articolo i fogli reperibili in commercio, comodamente utilizzabili per fare le figure, erano di questo tipo.
[10] Il testo è consultabile in internet, Informazioni sugli Autori sono reperibili, anche, in internet.

In figura 5 (n. 2 di C. F. Manara) sono indicati i nove stati di figura 1, numerati da 1 a 9: la spezzata congiungente i nove punti è quella che descriverebbe una palla da biliardo rimbalzando sulle sponde di un biliardo a forma di parallelogrammo 1QNM (dove 1 è il punto C di figura 4).

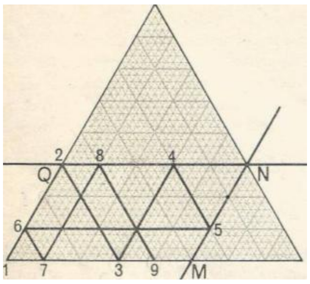


Figura 5

La figura 5 riassume gli 8 passi della figura 10 di A. Arcavi (qui non riportata).

Ovviamente, si può pensare, anche in termini di angoli di riflessione, come a p. 89 del già citato testo di Coxeter & Greitzer (v. nota 10).

Senza soffermarsi in dettagli, A. Arcavi conclude che il diagramma fornisce un metodo sistematico per risolvere questo problema e problemi simili, per scegliere il travaso a ogni passo, per rappresentare l'obiettivo, per trovare altre soluzioni e confrontarle, per essere sicuri di aver considerato tutte le possibilità (pp. 155-156).

3. – Possibilità di spunti aggiuntivi alla trattazione di Abraham Arcavi

Alla trattazione di A. Arcavi è possibile aggiungere spunti in relazione sia alle sue tre domande e ai "diagrammi di Bruno de Finetti" e sia ad altri aspetti: propongo quelli delle sezioni 4-11 e alcuni riferimenti bibliografici e sitografici [11].

Ma prima osservo che sarebbe interessante poter avere una idea della percentuale di lettori che conoscevano il problema e i diagrammi utilizzati (e su quale tipo di carta) e invito chi ha letto l'articolo d A, Arcavi a ripensare se ha cercato risposte alle domande, se ha cercato e trovato altre strade, se si è posto il problema della ottimalità della soluzione data, se ha fatto ricerche in internet.

[11] Come già accennato (in nota 6) i dati dei testi citati per il problema sono in bibliografia.

4. – Il problema nel *General Trattato* di Niccolò Tartaglia

C. F. Manara nell'articolo citato ha segnalato che Nccolò. Tartaglia [12] aveva inserito il problema nel *General trattato di numeri et misure* [13], del quale in figura 6 è riprodotto il frontespizio.


LA PRIMA PARTE DEL GENERAL TRATTATO DI NVMERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA,
NELLAQVALE IN DIECISETTE LIBRI SI DICHIARA TVTTI GLI ATTI OPERATIVI, PRATICHE, ET REGOLE NECESSARIE NON SOLAmente in tutta l'arte negotiaria, & mercantile, ma anchor in ogni altra arte, ſcientia, ouer diſciplina, doue interuenghi il calculo.

MALIGNITA'
NOIAR NON PVO A' FORTEZZA

CON LI SVOI PRIVILEGII.
In Vinegia per Curtio Troiano dei Navò.
M D LVI.

Figura 6

Nel testo, il problema è nel libro XVI come n. 232, riprodotto in figura 7.

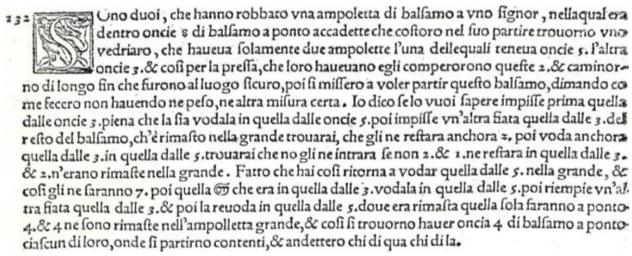

232 SOno duoi, che hanno robbato vna ampoletta di balſamo a vno ſignor, nellaqual era dentro oncie 8 di balſamo a ponto accadette che coſtoro nel ſuo partire trouorno vno vedriaro, che haueua ſolamente due ampolette l'una dellequali teneua oncie 5. l'altra oncie 3.& coſi per la preſſa, che loro haueuano egli comperorono queſte 2.& caminorno di longo fin che furono al luogo ſicuro, poi ſi miſſero a voler partir queſto balſamo, dimando come fecero non hauendo ne peſo, ne altra miſura certa. Io dico ſe lo vuoi ſapere impiſſe prima quella dalle oncie 3. piena che la ſia vodala in quella dalle oncie 5. poi impiſſe vn'altra fiata quella dalle 3. del reſto del balſamo, ch'è rimaſto nella grande trouarai, che gli ne reſtara anchora 2. poi voda anchora quella dalle 3. in quella dalle 5. trouarai che no gli ne intrara ſe non 2.& 1. ne reſtara in quella dalle 3.& 2. n'erano rimaſte nella grande. Fatto che hai coſi ritorna a vodar quella dalle 5. nella grande, & coſi gli ne ſaranno 7. poi quella 1 che era in quella dalle 3. vodala in quella dalle 5. poi riempie vn'altra fiata quella dalle 3.& poi la reuoda in quella dalle 5. doue era rimaſta quella ſola ſaranno a ponto 4.& 4 ne ſono rimaſte nell'ampolletta grande, & coſi ſi trouorno hauer oncia 4 di balſamo a ponto ciaſcun di loro, onde ſi partirno contenti, & andettero chi di qua chi di la.

Figura 7

Per comodità del lettore lo trascrivo, inserendo piccole variazioni per facilitare la lettura e invito a osservare l'ambientazione del problema.

«Sono duoi, che hanno robbato una ampoletta di balsamo a uno signor, nella qual era dentro oncie 8 di balsamo. a ponto accadette che costoro nel suo partire trovorno uno vedriaro, che haveva solamente due ampolette l'una delle quali teneua oncie 5, l'altra oncie 3 e cosi per la pressa, che loro havevano egli comperorono queste 2 e caminorno di longo fin che furono al luogo sicuro, poi si misero a voler partir questo balsamo. dimando come fecero non havendo ne peso, ne altra misura certa.».

---

[12] Niccolò Fontana detto Tartaglia (1499 circa - 1557). Informazioni sono reperibili, anche, in internet (MacTutor, …).

[13] 1556-1560, Venezia, Curzio Troiano Navò; informazioni sono in l-tart0.htm.

«*Io dico se lo vuoi sapere impisse prima quella dalle oncie 3 piena che la sia vodala in quella delle oncie 5 poi impisse un'altra fiata quella dalle 3 del resto del balsamo, ch'è rimasto nella grande. trovarai, che gli ne restara` anchora 2. poi voda anchora quella dalle 3 in quella dalle 5 trovarai che non gli ne intrarà se non 2 e 1 ne restarà in quella dalle 3 e 2 n'erano rimaste nella grande. Fatto che hai cosi ritorna a vodar quella dalle 5 nella grande, e cosi gli ne faranno 7 poi quella che era in quella dalle 3 vodala in quella dalle 5 poi riempie un'altra fiata quella dalle 3 e poi la revoda in quella dalle 5 dove era rimasta quella sola faranno a ponto 4 e 4 ne sono rimaste nell'ampoletta grande, e cosi si trovorno haver oncie 4 di balsamo a ponto ciascun di loro, onde si partirono contenti, e andettero chi di qua chi di là.*».

5. – Il problema in altre fonti

Sul problema proposto da A. Arcavi e su problemi simili (nel senso che vedremo) c'è una ampia letteratura in libri, articoli, *file* di internet e si trovano, anche, informazioni diverse o contrastanti, sulle quali non sempre è agevole individuare quelle da considerare attendibili [14].

Qui, pare sufficiente dare alcune indicazioni sulla varietà di denominazione dei problemi e accennare a due filoni di documentazione: quello di riferimenti storici su trattazioni dirette (non necessariamente usando recipienti) e quello di trattazioni con i diagrammi che, seguendo il titolo dell'articolo di C. F. Manara, chiamerò "triangolari" [15].

Per le denominazioni, che hanno componenti legate alla lingua, ci sono lemmi generali e lemmi particolari; segnalo (anche per eventuali ricerche in internet): problemi di travasi, problèmes de transvasements, il vino di Luca Pacioli, problema di Tartaglia, Tartaglia problema delle tre ampolle, Tartaglia travasi, water pouring puzzles, water jug problems, measuring puzzles, auspicando, come in nota 7, una raccolta sistematica.

Su riferimenti storici rimando all'appendice 2 e a § 8, limitandomi, qui, a segnalare che il problema trattato da A. Arcavi era già stato trattato, anche, da frate Luca Pacioli (1445-1557) [16].

---

[14] È, comunque, interessante accostare a trattazioni matematiche proposte divulgative. Come spesso accade, il problema dei controlli riguarda soprattutto internet; in dati qui riportati ho fatto correzioni senza indicarle. Su altri aspetti segnalo l'osservazione conclusiva della trattazione su N. Tartaglia alle pp. 76-77 di Manara & Lucchini.

[15] Su questa scelta rimando a § 7.

[16] Informazioni su L. Pacioli sono reperibili, anche, in internet (MacTutor, …). Dati sulla sua trattazione del problema sono reperibili, anche, in internet.

Su trattazioni con i diagrammi triangolari rimando all'appendice 3, limitandomi, qui, a segnalare che il riferimento, per chi lo inserisce, è all'articolo del 1939 di M. C. K. Tweedie [17].

6. – L'analisi sistematica e la soluzione ottimale

Anche per evidenziare efficacia e importanza della risoluzione con il metodo dei diagrammi, mi pare opportuno ricordare che il problema può essere affrontato in modo intuitivo con l'analisi sistematica dei travasi che si possono fare e di quelli che si devono scartare.

Per esempio, prendendo come riferimento la figura 8 [18], dallo stato iniziale A(8,0,0) si può passare a $B_1(3,5,0)$ o a $B_2(5,0,3)$ – ma è solo un travaso inutile passare a C(0,5,3) – e proseguire.

Ovviamente, chi vuole può costruirsi i suoi itinerari senza difficoltà e la figura 8 può essere vista come riferimento per parlare del modo di procedere: si vede che ci sono due soluzioni principali che evitano travasi inutili, indicate rispettivamente con gli indici 1 e 2; la prima è di otto travasi e la seconda di sette, si collegano in $H_1(4,4,0)$ e toccano tutti i punti a coordinate intere dei lati del parallelogrammo di figura 5 escluso N (0,5,3), che è C di figura 8.

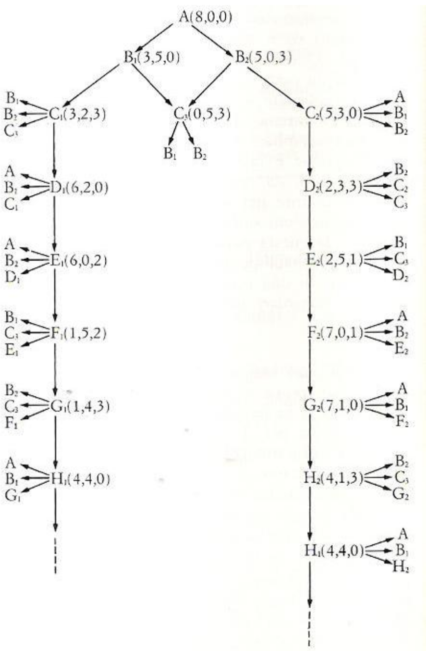


Figura 8

[17] L'articolo è reperibile, anche, in internet. Sarò grato di informazioni certe sull'Autore e sulla priorità, da inserire nel *file* indicato in nota 1.

[18] È tratta dal mio articolo del 1972.

Si noti che la figura 8 consente di dire che le soluzioni di A. Arcavi e di N. Tartaglia non sono quella ottimale (che richiede un travaso in meno); anche C. F. Manara ha dato questa soluzione (oltre a un'altra volutamente con travasi inutili) [19].

7. – Sulla denominazione "diagrammi di Bruno de Finetti"

Sull'uso della denominazione "de Finetti diagram" (già vista in § 1 e § 2, oltre che nel titolo dell'articolo) per quello che ho preferito chiamare "diagramma triangolare" mi pare opportuno suggerire qualche riflessione, cominciando con una citazione tratta dall'articolo di C. F. Manara /p. 109).

«*Un altro campo in cui tale rappresentazione geometrica viene usata è quello della biologia, in cui si applica questo tipo di rappresentazione, per esempio, ai fenomeni di ereditarietà; il primo ad usare questa rappresentazione fu B. de Finetti, il quale spesso parlando agli insegnanti di matematica lamenta il fatto di aver dovuto imparare a scuola una massa di proprietà "noiose" ed inutili mentre i diagrammi triangolari, che gli servivano, aveva dovuto "impararli" dai chimici.*».

Ovviamente, utilizzazioni in altri settori di studi potrebbero costituire un terzo filone di ricerca (dopo i due segnalati in § 5), ma questo esula dagli obiettivi suggeriti dall'articolo di A. Arcavi.

Mi limito a segnalare che, nell'articolo predetto, C. F. Manara dà indicazioni di altre utilizzazioni e che ulteriori informazioni sono reperibili, anche, in internet e a riportare come figura 9 quella proposta da B. de Finetti in "Come riflettere in termini di probabilità" de *Il "saper vedere" in matematica* [20] (dove è la figura 48) [21].

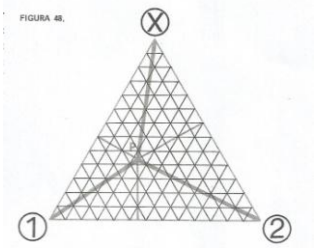


Figura 9

[19] Sulla ottimalità della soluzione tornerò in § 9.

[20] La figura è a p. 55 dell'edizione 1967 e a p. 386 del volume citato in nota 2. Carla Rossi, a p.89 dell'articolo citato subito prima della figura 10, riporta una figura analoga.

[21] Nella nota bibliografica 6 (p. 403 del testo in internet da "NB6, p. 312"), B. de Finetti segnala *La matematica per le applicazioni economiche*, scritto con Ferruccio Minisola (Roma, Cremonese, 1961): "*Vi si possono trovare, un po' più sviluppati, argomenti come quelli accennati nel testo, di tipo economico, statistico, probabilistico (ma anche altri: notizie in forma semplice su funzioni, ecc.).*".

Aggiungo che nell'articolo "La probabilità per tutti seguendo l'insegnamento creativo, i suggerimenti e l'esempio di Bruno de Finetti" [22] Carla Rossi ha inserito (come figura 4 a p.97) la visualizzazione di figura 10 (reperibile anche in internet), abitualmente proposta per presentare i diagrammi di B. de Finetti in applicazioni alla genetica delle popolazioni [23].

C. Rossi ha intitolato la figura 10 "Diagramma di de Finetti nel lavoro A 1926", che nella bibliografia del volume della rivista indica "Considerazioni matematiche sull'eredità mendeliana", *Metron* 6, n. 1, 3-41 (p. 470).

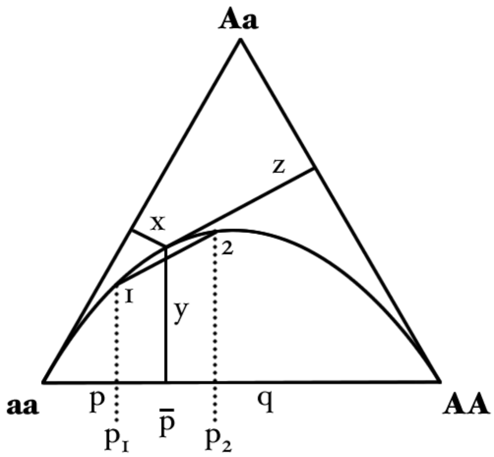


Figura 10

8. – Precedenti e variazioni del problema

Di trattazioni di problemi del tipo di quello proposto da A. Arcavi sono noti altri precedenti (oltre a quelli già citati di L. Pacioli e N. Tartaglia e a quelli già indicati sull'uso di diagrammi), anche con variazioni non soltanto sul numero dei recipienti e sulle capacità.

A commento del n. 12 dei *Problemi per rendere acuta la mente dei giovani* di Alcuino di York [24], Raffaella Franci [25] scrive (2005):

«*Quello qui presentato è il primo esempio oggi noto di problema di liquidi e recipienti. Tali problemi divennero molto popolari in Europa nel periodo medioevale; non se ne conoscono versioni extraeuropee.*».

La traduzione (dal latino) del problema nel libro è:

[22] Informazioni su C. Rossi sono reperibili, anche, in internet.

[23] Informazioni sono reperibili, anche, in internet.

[24] Informazioni su Alcuino (735-804) e sul libro sono reperibili, anche, in internet.

[25] Informazioni su R. Franci sono reperibili, anche, in internet.

«*Un padre morendo lasciò in eredità ai suoi tre figli 30 ampolle di vetro, dieci delle quali piene d'olio, altre dieci riempite a metà, le terze dieci vuote. Divida, chi può, olio e ampolle in modo che ciascuno dei tre figli ottenga la stessa quantità sia di vetro che di olio*.».

Il riferimento successivo che ho trovato è agli *Annales Stadenses* redatti tra il 1240 e il 1256 [26] da Alberto di Stade [27]: del problema .segnalo due formulazioni in internet, una di Dario Bressanini e una di Dario Uri (v. inizio di § 5).

…..La prima, che nella sostanza coincide con quella di A. Arcavi, è:

«*Buon Firri, ti proporrò anch'io un problema, e certamente più sottile. Il mio signore, che voleva dare un banchetto, mi ha mandato alla città vicina a prendere il vino. Ho portato con me un recipiente capace otto misure. Riempito quello, alla taverna non restava altro vino. Tornando a casa ti incontro e anche tu stai andando a prendere il vino. Mi chiedi da dove arrivo e ti rispondo "dal foro, sto portando il vino al mio signore". Mi chiedi quanto vino e ti rispondo "otto misure". Tu mi dici "anch'io sto andando a prendere il vino", ti rispondo "non ne troverai", così mi chiedi di dividere con te il mio. Ti chiedo se hai dei recipienti e mi dici di averne due, uno da cinque misure e l'altro da tre. Ti darò la metà, e cioè quattro misure, se potrai dividere il vino con questi recipienti. Dividilo, oppure ti tocca restar senza.*».

La seconda formulazione, con altre regole , è:

«*Ho 2 damigiane, una da 5 litri e una da 3, senza tacche, e una fontana; posso svuotare le damigiane e riempirle quanto voglio, ma devo ottenere 4 litri esatti.*» [28].

Varie considerazioni su questo problema, anche in riferimento alla utilizzazione del quesito nel film *Die Hard 3* [29], si trovano, pure, in internet.

In internet si trova, anche, la formulazione di Nicolas Chuquet in *Triparty en la science des nombres*[30]; indico testo e informazioni di *Problèmes de transvasements (première partie)*, che riporta, pure, la trattazione di Claude-Gaspard Bachet de Méziriac della vesione 8, 5, 3 [31].

---

[26] Informazioni sul testo, che non è una raccolta di problemi matematici, si trovano, anche, in internet, spesso con altre datazioni.

[27] Informazioni sono reperibili, anche, in internet col nome in italiano e con Albert von (of, de) Stade.

[28] Per passare al problema considerato da A. Arcavi basta sostituire la fontana con una caraffa da 8 litri piena.

[29] Tra quelle in italiano segnalo il *file* di Dario Bressanini.

[30] Informazioni su N. Chuquet (1445-1488) e sul testo sono reperibili, anche, in internet (MacTutor, …).

[31] Informazioni su C.-G. Bachet (1581-1638) e sul testo sono reperibili, anche, in internet (MacTutor, …).

Sulla generalizzazione del problema con due recipienti segnalo che, anche, in internet è consultabile l'articolo di Yiu-Kwong Man "On Optimal Solution of the General Two Jugs Problem".

In altre variazioni è opportuno distinguere tra quelle relative alle capacità delle tre caraffe (o altri recipienti) o all'obiettivo con le regole sui travasi del testo di A. Arcavi e quelle relative al numero dei recipienti o ad altre regole sui travasi.

Come già segnalato (v. § 5), dati su esempi di trattazioni sono nelle appendici 2 e 3.

Qui comincio con il presentare un semplice esempio, che mostra che possono esserci problemi di risolubilità: quello di figura 11, che è relativo a capacità 8, 6, 2 con piena la prima caraffa e vuote le altre, dove gli stati raggiungibili, in due ordini, sono: (2,6,0), (2,4,2), (4.4.0), (4,2,2), (6,2,0), (6,0,2), cioè soltanto con numeri pari. [32].

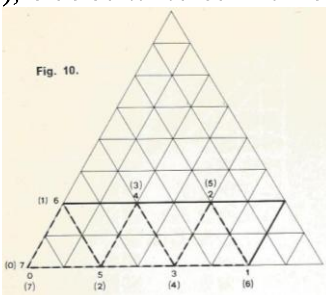


Figura 11

Ovviamente, il metodo dei diagrammi consente di verificare l'eventuale unicità e l'ottimalità della soluzione, come indicato da A. Arcavi, oltre alla esistenza (v. § 9).

Nelle variazioni sulle capacità delle tre caraffe, ferme restando le predette questioni, è interessante considerare la forma della regione ammissibile con il superamento del fatto che la prima caraffa abbia capacità somma delle altre due.

Oltre al caso visto di $8>5>3$ (con $8=5+3$), cioè $a>b>c$ con $a=b+c$, ci sono quattro possibilità:

--- $a=b=c$: con i tre vertici del triangolo;

--- $a=b>c$: la poligonale è il trapezio AQRBA di figura 12 di scarso interesse;

--- $a>b\geq c$ con $a<b+c$: la poligonale è il pentagono AQRSMA di figura 13;

--- $a>b\geq c$ con $a>b+c$: la poligonale è il parallelogrammo AQNMA di figura 14.

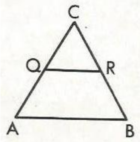


Figura 12

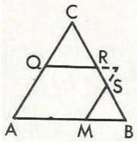


Figura 13

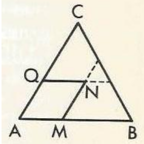


Figura 14

[32] Le figure dalla 11 alla 22 sono riprese dal mio articolo e mi pare superfluo indicarne la numerazione nell'originale.

Due esempi relativi rispettivamente alle figure13 e 14 sono riportati nelle figure 15 e 16 relative a recipienti di capacità (7,6,4) e (8,4,3).

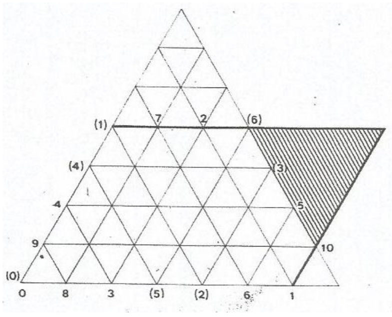


Figura 15

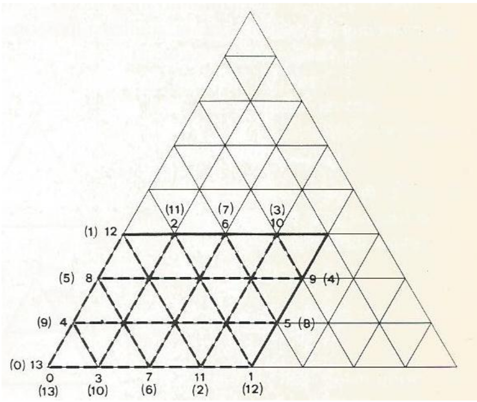


Figura 16

Per ulteriori variazioni rimando agli articoli di M. C. K. Tweedey e di C. F. Manara, reperibili in internet, al testo di Coxeter e Greitzer pure reperibile in internet, a dati dell'appendice 3.

9. – Esistenza, unicità, ottimalità della soluzione

In § 2 abbiamo visto che A. Arcavi pone le questioni di unicità e ottimalità della soluzione, avendo di fatto già risolta quella della esistenza.

Chiaramente, se esiste una soluzione se ne possono costruire altre con coppie o catene di travasi "inutili" e il metodo dei diagrammi consente di verificare l'esistenza, l'eventuale unicità, l'ottimalità per il singolo problema.

Sull'esistenza è, comunque, interessante ricordare che nell'articolo del 1950 "On a well know puzzle" Walter Warwick Sawyer (1911-2008) [33] dà un risultato generale per la divisione in parti uguali nel caso $a=b+c$: il problema ha soluzione soltanto se b e c sono primi tra loro. Il risultato si trova, anche, in Coxeter & Greitzer nella forma "quando b e c sono coprimi" (p. 93).

[33] Informazioni sull'Autore sono reperibili, anche, in internet.

Sulla ottimalità mi pare opportuno ricordare l'importanza di porre esplicitamene il problema della ottimizzazione.

10. – Variazioni con pavimentazioni nell'uso dei "diagrammi triangolari"

Un altro tipo di variazioni sull'uso dei diagrammi triangolari nella rappresentazione di travasi riguarda il passaggio a un procedimento di pavimentazione [34].

In figura 17 è riportato il parallelogrammo degli stati raggiungibili di figura 3, completato con la numerazione degli altri stati raggiungibili nei due ordini di figura 7 [35].

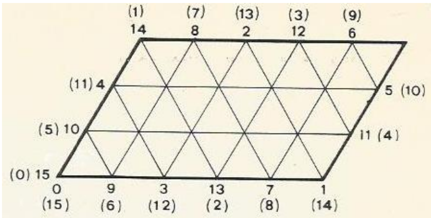


Figura 17

In figura 18 è disegnato un rombo ottenuto con 3x5 parallelogrammi di lati 5 e 3.

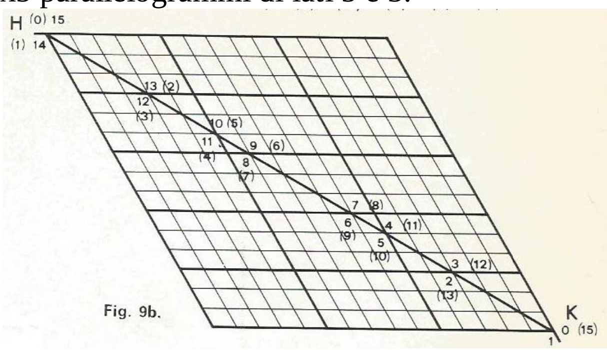


Figura 18

Sulla diagonale HK sono indicati i 15 stati (escluso il vertice predetto), letti sui lati con quantità nel secondo recipiente da sinistra a destra sui lati orizzontali, sopra e sotto, e quantità nel terzo recipiente dall'alto in basso sui lati obliqui, a sinistra e a destra; la quantità nel primo è sottintesa:

-- (0) … (15) da H a K, (0,0), (0,3), (3,0), (3,3), (5, 1), (0,1), …;

-- 0 … 15 da K a H: (0,0), (5,0), (2,3), (2,0), (0,2), (5,2), …

---

[34] Uso la denominazione di § 4 (p. 42) del mio articolo.

[35] Si noti che, come osservato in § 6, è escluso il vertice in alto a destra, corrispondente a (0,5,3), che è uno stato di nessuna utilità.

In figura 19 il rombo è sostituito con un quadrato.

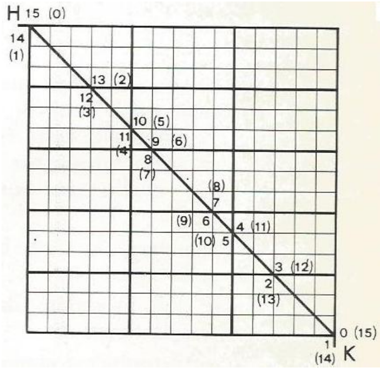


Figura 19

In figura 20 è riportato il rombo per figura 11.

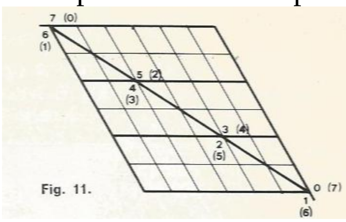


Figura 20

In figura 21 è riportato il quadrato per figura 15.

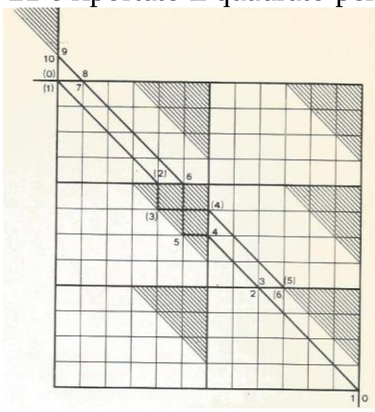


Figura 21

In figura 22 è riportato il quadrato per figura 15.

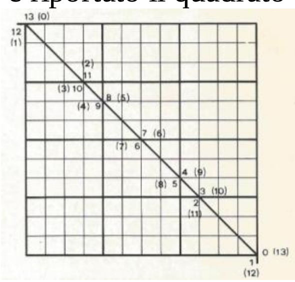


Figura 22

11. – Conclusione

Confido di aver dato un contributo alla attribuzione di importanza della visualizzazione con diagrammi data da A. Arcavi e di aver indicato l'utilità del mettere insieme le conoscenze per costruire un quadro nel quale gli interessati possano trovare riferimenti, stimoli e indicazioni rispondenti ai loro desideri di approfondimento, con dati che consentano i controlli ritenuti opportuni.

Mi pare che sia auspicabile un sito internet di riferimento, anche per la facilità di ampliamento e di aggiornamento, e che la posizione di A. Arcavi nell'ICMI (richiamata in nota 3) possa essere ritenuta importante [36].

Riferimenti bibliografici e sitografici

[1] A. AGOSTINI, "De Viribus Quantitatis di Luca Pacioli", *Periodico di Matematiche*, 1924, pp. 165-192.

[2[ALBERTO DI STADE, *Annales stadenses* (v. nota 27).

[3] ALCUINO DI YORK: *Giochi matematici alla corte di Carlomagno* - *Problemi per rendere acuta la mente dei giovani*, a cura di R. Franci, Pisa, ETS, 2005.

[4] G. ANICHINI & L. GIACARDI & E. LUCIANO (a cura di), "Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica – Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà", *La Matematica nella Società e nella cultura – Rivista della Unione Matematica Italiana*, Serie I, vol. VIII, n. 3 (dicembre 2015), 500 pp. più fotografia a colori e indice.

[5] A. ARCAVI, "Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education", in [4], pp.143-160.
[The three jugs problem, pp. 151-156].

[6] C.-G. BACHET DE MÉZIRIAC, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, 1612; riedizione a cura di A. Labosne, Paris, Gautier-Villars, 1884. Citato in [21], per p. 150, e in [32].

[7] W. W. R. BALL & H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays* (12th ed.), Univ. of Toronto Press, 1974. Citato in [10] per p. 28 e p. 40.

[8] A. BAKST,: *Amusement mathèmatiques*, Paris, Dunod, 1961; ed. or. *Mathematical Puzzles and Pastimes*, New. York, Van Norstrand, 1954. Citato in [19] per "La boule de billard calcolatrice". Reperibile in internet.

[9] D. BRESSANINI, *Il vino di Luca Pacioli*, internet.

]10] H. S. M. COXETER & S. L. GREITZER, *Geometry Revisited*, Washington, The Mathematical Association of America, 1967. Citato in [5] a p. 151 e a p. 160; reperibile in internet. [§ 4.6 The three jug problem, pp. 89-93].

[11] N. CHUQUET, *Triparty en la science des nombres* - Publié d'après le manuscrit, Rome. 1881. Citato in [25].

[12] B. de FINETTI, *Il "saper vedere" in matematica*, Torino, Loescher, 1971; ristampato in [4], pp. 299-408.

[13] H. E. DUDENEY, *Amusements in Mathematics*, London [etc.], T. Nelson, 1917. Citato a p. 109 di [31].

[14] M. GARDNER, rubrica "Mathematical games" in *Scientific Amercan*, citato in [19].

[15] I. GHERSI, *Matematica dilettevole e curiosa*, III Ed., Milano, Hoepli, 1929. Citato in [21] per p. 12. Ci sono edizioni successive.

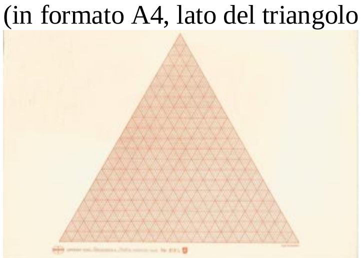
[16] G. LUCCHINI, "Diagrammi triangolari: risolubilità e ottimizzazione", *Didattica delle scienze*, n. 39 (1972), pp. 39-48; ristampato in *Collectnea Mathematica*, n. 404; indice in internet (l-gl26.htm).

[17] G. LUCCHINI, rp-trv0.htm, internet.

[36] Ovviamente, senza escludere pubblicazioni.

[18] Y.- K. MAN, “On Optimal Solution of the General Two Jugs Problem”, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, Vol. 11, N, 2 (2016), pp. 137-144; reperibile, anche, in internet.
[19] C. F. MANARA, “Argomenti vecchi e insegnamenti nuovi: diagrammi triangolari”, *Le scienze e il loro insegnamento*, n. 2-3 del 1965, pp. 107-115; reperibile, anche, in internet.
[20] *MacTutor history of mathematics archive*, internet
[21] C. F. MANARA & G. LUCCHINI: *Momenti del pensiero matematico*, Mursia, 1976, reperibile anche in internet; [sezione su Niccolò Tartaglia].
[22] H. O’BEIRNE, *Puzzles and Paradoxes,* Oxford University Press, 1965, London. Citato in [10] per pp. 49-75.
[23] L. PACIOLI. *De Viribus Quntitatis*, v. [1] e [33].
[24] A. L PEREL’MAN, *Zanumatel’maya Geometria*, Moskow, 1950. Citato in [10].
[25] *Problèmes de transvasements (première partie)*, internet.
[26] C. ROSSI, “La probabilità per tutti seguendo l’insegnamento creativo, i suggerimenti e l’esempio di Bruno de Finetti”, in [4], pp. 73-108.
[27] W. W. SAWYER, “On a well know puzzle”, *Scripta Mathematica*, 16 (1950), pp. 107-110. Citato in [31].
[28] D. SINGMASTER, *Chronology of recreational mathematics*, internet.
[29] D. SINGMASTER, David: *Sourses in recreational mathematics*, internet.
[30] N. TARTAGLIA, *General trattato di numeri et misure*, Venezia, Curzio Troiano Navò 1556-1560.
[31] M. C. K TWEEDIE, “A Graphical Method of Solving Tartaglian Measuring Puzzles”, *The Mathematical Gazette,* Vol. 23, N. 255 (Jul., 1939), pp. 278-282; Citato in [10]. Reperibile in internet.
[32] D. URI, Dario: *Travasi*, internet.
[33] URILAND, *De viribus quantitatis 58*, internet.
NB – Per altre fonti rimando a rp-trv0.htm.

Appendice 1: foglio di carta in commercio
(in formato A4, lato del triangolo 20 cm)



SELECTA COPYRIGHT CARL SCHLEICHER
& SCHÜLL EINBECK / HAN. Nr. 315/2

Appendice 2: Alcuni dati storici su problemi di travasi con procedimenti intuitivi

- 800 circa: Alcuino di York:
  v. § 8
- 1240: Albert von Stade:

v. § 8
- 1370: Paolo Dell'Abaco (da [32]):
  8,5,3 →4,4,0
- 1484: Nicolas Chuquet:
  v. § 8
- 1500: Luca Pacioli (da 32]):
  8,5,3→4,4,0 e 12,7,5→6,6,0
  18,7,6,5 →6,6,6,0
- 1556: Niccolò Tartaglia:
  8,5,3→4,4,0 (da [10])
  24,13,11,6→8,8,8,0 (da [10])
  …
- 1624: Gaspar Bachet de Mèziriac (da [16]):
  8,5,3→4,4,0; 16,9,7→ 8,8,0;
  16,11,6→8,8,0; 42,27,12→ 21,21,0

NB Per ulteriori dati segnalo [1] e [25].

Appendice 3: Alcuni dati sull'uso di diagrammi (e pavimentazioni in [16])

-1939 Tweedie:
  8,5,3→4,4,0; 10,6,5 con 6,6,0→3,4,5;
- 1961 Bakst:
  12,7,5→6,6,0; 12,9,7→6,6,0; 7,5,4:
- 1965 Manara:
  8,5,3→4,4,0; (2 sol), 12,7,5→6.6.0,
  12,9,5→6,6,0,
  gettar via e attingere,
  8,5,3 →4,1; 11,7→2; 8,5,3→1,1,3;
- 1967 Coxeter& Greitzer:
  8 con 7,6,3→4,4,0; 10 con 8,7,6,
  10 con 8,6,4; 8 con 8,5,3;
- 1972 Lucchini:
  8,5,3→4,4,0; 8,6,2; 8,4,3; 7,6,4;
- 2015 Arcavi:
  8,5,3→4,4,0.

Gabriele Lucchini (nato a Milano il 17 febbraio1939) è andato in pensione nel 2009 come professore associato di *Matematiche complementari* nell'Università degli Studi di Milano, dopo aver tenuto vari insegnamenti matematici, anche in altre università, ed è ancora attivo con articoli su riviste e pagine web personali predette.
Ha considerato *Matematiche complementari* un corso per la formazione degli insegnanti e, accostando i fondamenti intrinseci della professione ai fondamenti legislativi, lo ha sviluppato in tre direzioni di preparazione: professionale, culturale, didattica.
Curriculum ed elenco delle pubblicazioni sono reperibili nelle sue pagine personali indicate sopra; vari scritti sono consultabili in internet.