Argomento 5
Suggerimenti e soluzioni

Suggerimento Ex.5.3 Utilizzare il Teorema degli zeri.

Suggerimento Ex.5.4 La funzione $g(x) = x^3 - 3x + 1$ è un polinomio di III grado; inoltre $g(1) = -1 < 0 < 1 = g(0)$ e $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$. Poi, utilizzare il Teorema degli zeri.

Suggerimento Ex.5.9 e 5.10 Ogni $x \in \mathbb{R}$ può essere indefinitamente avvicinato sia da razionali che da irrazionali.

Sol. Ex. 5.1

1) Per $x \to 0$ abbiamo
$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{(e^x - 1) - (e^{-x} - 1)}{x} \sim \frac{(x) - (-x)}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$
e quindi c'è continuità in $x = 0$ per $\alpha = 2$.

2) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e continua per $x \neq 1$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. In $x = 1$ vale 5, ed è continua da sinistra; poichè $\lim_{x \to 1^+} \alpha x^2 = \alpha$, la funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 5$.

3) La funzione è continua in ogni $x \neq 0$. Poichè $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \sin(\frac{1}{x})}{1 + x^2} = 0$, c'è continuità in $x = 0$ per $\alpha = 0$.

4) Funzione continua in ogni $x \neq 1$; in $x = 1$ è continua da sinistra, e $\lim_{x \to 1^+} \alpha(x - 1) = 0 = f(1)$ per ogni valore di α, per cui f è continua in $\mathbb{R}$ per ogni valore di α.

5) Notiamo che la quantità $e^x - x$ è sempre positiva se $x < 0$, per cui $\log(e^x - x)$ è ben definito, ed il denominatore non si annulla mai. Cosı̀, l'unico possibile punto di discontinuità è $x = 0$, in cui la funzione è continua da destra e assume il valore $\alpha^2 + 3\alpha$. Poichè
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\log(e^x - x) + 1}{x - e^x} = \frac{\log 1 + 1}{-1} = -1\ ,$$
abbiamo continuità in $x = 0$ se $\alpha^2 + 3\alpha = -1$, cioè $\alpha = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$.

6) Poichè $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + 5\alpha x^2)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{5\alpha x^2}{2x^2} = \dfrac{5\alpha}{2}$, abbiamo continuità in $x = 0$ se $\alpha^2 - 1 = \dfrac{5\alpha}{2}$, cioè se $\alpha = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{41}$. Tuttavia, perchè f sia definita in tutto $\mathbb{R}$ deve essere sempre definita l'espressione $\log(1 + 5\alpha x^2)$, e quindi deve essere $\alpha \geq 0$. Cosı̀, l'unico valore accettabile per α è $\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{41}$.

7) Per $x \leq 0$ l'espressione $x + \frac{1}{x-2}$ è sempre definita, mai nulla, e continua, per cui
$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \iff f \text{ continua in } x = 0 \iff \lim_{x \to 0^+} x^{1/(3\alpha - 5)} = f(0) = 0 \iff \frac{1}{3\alpha - 5} > 0 \iff \alpha > \frac{5}{3}\ .$$

8) La funzione è continua in ogni $x > 0,\ x \neq 1$; ponendo $t = x-1$ abbiamo $\alpha = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[5]{2-x}}{\log x} = \frac{1}{5}$, perchè $\lim_{t\to 0} \frac{1-\sqrt[5]{1-t}}{\log(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t/5}{t}$.

Sol. Ex. 5.2 **i)** $-3+q = -m+4$, cioè $m+q = 7$; **ii)** $\begin{cases} m+q=7 \\ -6+q=5m+4 \end{cases}$, da cui $m = -\frac{1}{2}, q = \frac{15}{2}$.

Sol. Ex. 5.3 $f(x) = x^3 - 3x - 4$ è continua in $[1,3]$, e ha valori di segno opposto nei punti $x = 1$ e $x = 3$. Per il teorema degli zeri, f si annulla almeno una volta in un punto $x_0 \in (1,3)$. Poichè ci viene garantito che questo punto è unico, e $f(2) < 0$, questo stesso teorema applicato all'intervallo $[2,3]$ permette di concludere che $x_0 > 2$.

Sol. Ex. 5.4 La funzione $g(x) = x^3 - 3x + 1$ è continua in $\mathbb{R}$; assume valore positivo in $x = 0$ e valore negativo in $x = 1$, per cui si annulla almeno una volta nell'intervallo $(0,1)$. Inoltre, poichè $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, g si annulla almeno una volta in $(1,+\infty)$ e, in modo simile, si annulla almeno una volta in $(-\infty,0)$ perchè $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Cosı̀, g si annulla almeno 3 volte in $\mathbb{R}$; trattandosi di un polinomio di III grado, non può avere più di 3 zeri.

Sol. Ex. 5.5

1) I polinomi sono funzioni ovunque continue, per cui in ogni punto $x \neq 2$ c'è continuità. In $x = 2$ c'è anche continuità da destra, perchè l'espressione $f(x) = 10$ vale da 2 (compreso) in poi. Sempre per la continuità dei polinomi, il limite $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ può essere calcolato sostituendo $x = 2$ nell'espressione $3x^2 - 1$, ottenendo $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 11 \neq 10 = f(2)$. Perciò, in $x = 2$ la f presenta una discontinuità di I specie.

2) Unica possibile discontinuità in $x = 0$. Però, $\log(1+3x) \to 0$ se $x \to 0^-$, e $\sqrt{x}(3-x) \to 0 = f(0)$ se $x \to 0^+$, per cui f è continua in tutto il suo dominio $(-\frac{1}{3}, +\infty)$.

3) Le tre espressioni coinvolte sono continue rispetto a x, per cui f è certamente continua per $x \neq 0$ e $x \neq 5$, ed è continua da destra in $x = 0$ e $x = 5$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0 = f(0) \ \left(= \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$$

per cui f è continua anche da sinistra, e quindi è continua, in $x = 0$. Invece

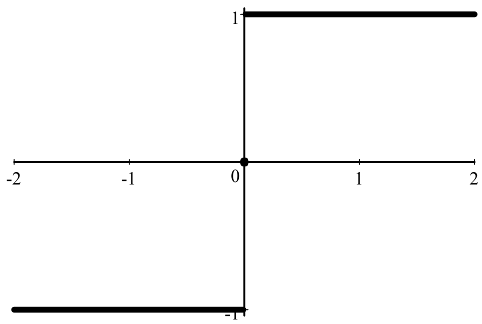
$$\lim_{x\to 5^-} \frac{2x}{x-5} = -\infty$$

e quindi $x = 5$ è un punto di discontinuità di II specie.

4) Discontinuità di II specie in $x = -5$, perchè $\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{(x+5)^2} = +\infty$. Discontinuità di I specie in $x = 4$, perchè i limiti unidirezionali esistono, sono finiti, e diversi tra loro.

Sol. Ex. 5.6 La funzione ha una discontinuità di I specie in $x = 4$, nel caso $\alpha \neq 17$; è invece continua ovunque se $\alpha = 17$.

Sol. Ex. 5.7 Discontinuità di I specie in $x = 0$.



Sol. Ex. 5.8 La funzione "parte intera" ha discontinuità di I specie in tutti i punti a coordinata intera (vd. Esempio 5.11), e questo vale perciò per tutti gli interi ≤ 3. Per $x > 4$ la f è continua. In $x = 4$ si ha

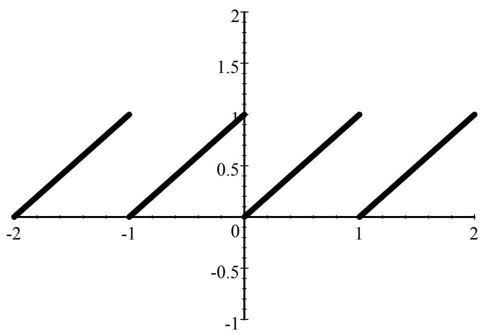
$$\lim_{x\to 4^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{\frac{x}{2} + 7} = 3 \neq 4 = f(4)$$

per cui si tratta di un punto di discontinuità eliminabile.

Sol. Ex. 5.9 Ogni $x \in \mathbb{R}$ è un punto di discontinuità di II specie.

Sol. Ex. 5.10 Per $x \to x_0$ la funzione assume infinite volte i valori x e x^3, per cui c'è continuità solo se $x_0 = x_0^3$, cioè in $x = -1,\ x = 0$ e $x = 1$.

Sol. Ex. 5.11 Discontinuità di I specie in tutti i punti a coordinata intera, in cui f è continua da destra.



Sol. Ex. 5.12 La funzioni f e g sono continue in tutti i punti a coordinata non intera, per cui lo è anche $(g \circ f)$. In $x_0 \in \mathbb{Z}$ si ha

$$(g \circ f)(x_0) = \lfloor x_0 - \lfloor x_0 \rfloor \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0 \ ,$$

mentre se x è vicino ad x_0, ma $x \neq x_0$, è

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$$

per cui $(g \circ f)(x) = \lfloor f(x) \rfloor = 0$. Così, $(g \circ f)$ è continua in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Sol. Ex. 5.13 La funzione $x - \lfloor x \rfloor$ si annulla nei punti a coordinata intera, e assume valori positivi negli altri punti, per cui

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} .$$

Quindi f ha discontinuità eliminabili in tutti i punti a coordinata intera.