Argomento 7

Studio di funzione

Studiare una funzione significa ottenere, mediante strumenti analitici (limiti, derivate, ecc.) informazioni utili a disegnare un grafico qualitativo della funzione data. I principali passi da compiere a questo scopo possono essere suddivisi in due parti, delle quali la prima riguarda i punti assolutamente essenziali, la seconda i punti che possono dare ulteriori informazioni, in alcuni casi utili per completare quelle precedenti, ma non sempre da seguire.

Passi fondamentali

1. Determinazione campo di esistenza $E(f)$ di f.

2. Limiti di f agli estremi di $E(f)$ (ed eventuali asintoti orizzontali, verticali ed obliqui).

3. Calcolo di f'.

4. Studio del segno di f' e determinazione intervalli di monotonia, con eventuali punti di massimo e di minimo.

Ulteriori informazioni utili per ottenere il grafico di f

a. Calcolo di f''.

b. Studio del segno di f'' e determinazione intervalli di convessità, con eventuali punti di flesso.

c. Calcolo del valore di f per gli eventuali punti di max e di minimo.

d. Intersezioni con gli assi.

e. Segno di f.

f. Calcolo dei limiti di f' agli estremi di $D(f')$, per stabilire eventuali tangenti al grafico in punti in cui non esiste la derivata e il tipo di convessità all'infinito.

ESEMPIO 7.1

$$\boxed{f(x) = x + 2x \log x.}$$

1. Per determinare $E(f)$, dobbiamo imporre le condizioni richieste per l'esistenza delle funzioni elementari che compongono f. In questo caso è presente il logaritmo, quindi dobbiamo imporre che il suo argomento sia positivo: $x > 0$, quindi $E(f) = (0, +\infty)$.

2. Limiti agli estremi: in questo caso gli estremi di $E(f)$ sono 0 e $+\infty$, quindi dobbiamo calcolare:

$$\lim_{x\to 0^+} x + 2x\log x = 0, \qquad \text{in quanto } \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \text{ per } \alpha > 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} x + 2x\log x = \lim_{x\to +\infty} 2x\log x = +\infty.$$

Poiché $f(x) \sim 2x \log x$ per $x \to +\infty$, f è infinito di ordine superiore a x per $x \to +\infty$ e di conseguenza f non ha asintoti obliqui.

3. Calcolo di f':

$$f'(x) = 1 + 2\log x + 2x\frac{1}{x} = 2\log x + 3.$$

4. Segno di f':

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} 2\log x + 3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \log x > -\dfrac{3}{2} \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > e^{-\frac{3}{2}} \\ x > 0 \end{cases} \iff x > e^{-\frac{3}{2}}.$$

	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Quindi f è decrescente in $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ e crescente in $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$. In $x = e^{-\frac{3}{2}}$, presenta un punto di minimo (assoluto).

a-b. Calcolo e segno di f'': essendo semplici da calcolare, ci conviene farlo, in modo da conoscere gli intervalli di convessità:

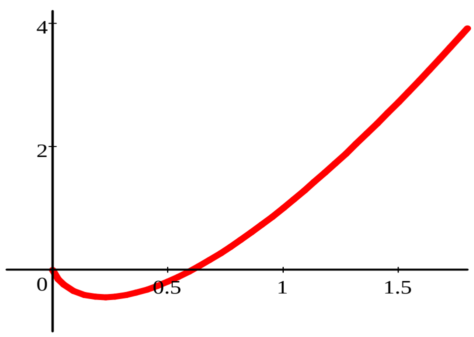
$$f''(x) = \frac{2}{x} > 0 \iff x > 0.$$

Quindi f è convessa su tutto il suo dominio.

c-d-e. In questo caso non servono per un grafico qualitativo, in quanto le informazioni in nostro possesso ci permettono di dedurre che il grafico ha una sola intersezione (di ascissa $\bar{x}$), con l'asse x, prima di $\bar{x}$ f è negativa e dopo è positiva. In ogni caso, il calcolo del valore di f nel punto di minimo $x = e^{-\frac{3}{2}}$ è molto semplice, in quanto $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{3}{2}} \log e^{-\frac{3}{2}} = -2e^{-\frac{3}{2}} < 0$, e ci conferma le deduzioni precedenti.

f. Poiché la convessità è già stata studiata in **b**, possiamo vedere con che pendenza parte il grafico, calcolando $\lim_{x \to 0^+} 2\log x + 3 = -\infty$. Quindi abbiamo tangente verticale in 0.

Grafico di $f(x) = x + 2x \log x$



ESEMPIO 7.2

$$\boxed{f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}.}$$

1. Per determinare $E(f)$, dobbiamo imporre che l'argomento della radice sia strettamente positivo (non può essere nullo perchè la radice è al denominatore). Quindi abbiamo $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, cioè $E(f)=(-1,+\infty)$.

2. Limiti agli estremi: in questo caso gli estremi di $E(f)$ sono -1 e $+\infty$, quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$, quindi f ha un ordine di infinito inferiore ad 1 per $x \to +\infty$ e non ha asintoti obliqui.

3. Calcolo di f':

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \dfrac{x+2}{2\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{2x+2-x-2}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3} = \frac{x}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3}.$$

4. Segno di f':

$$f'(x)>0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x>0 \\ x>-1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x>0.$$

	-1		0	
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Quindi f è decrescente in $(-1,0)$ e crescente in $(0,+\infty)$. In $x=0$ si ha un punto di minimo (assoluto).

A questo punto possiamo tentare di disegnare il grafico, ma ci accorgiamo di non sapere se il grafico interseca l'asse x. Abbiamo 2 opzioni:

c. Calcolo l'ordinata del punto di minimo: $f(0)=2$ (in questo caso più veloce).

d-e. Studio il segno di f:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+1}} > 0 \;\Leftrightarrow\; x>-2 \text{ e } x\in E(f) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x>-1.$$

In conclusione il grafico sta tutto sopra l'asse x.

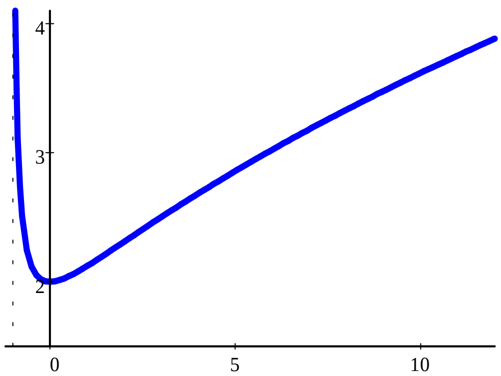
a-b. Calcolo e segno di f'':

$$f''(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3} - \frac{3}{4}\frac{x}{\left(\sqrt{x+1}\right)^5} = -\frac{1}{4}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x+1}\right)^5} > 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-2<0 \\ x>-1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x<2 \\ x>-1 \end{cases}.$$

	-1		2	
$f''(x)$		$+$		$-$
$f(x)$		$\cup$		$\cap$

Quindi f è convessa in $(-1, 2)$ e concava in $(2, +\infty)$. In $x = 2$ presenta un punto di flesso.

Grafico di $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$



ESEMPIO 7.3

$$\boxed{f(x) = \arctan(x^3) - x^3.}$$

1. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto somma di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

2. Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^3) - x^3 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x^3) - x^3 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = +\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim -x^3$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = 3\frac{x^2}{1+x^6} - 3x^2 = -3\frac{x^8}{1+x^6} \le 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi f risulta decrescente su tutto l'asse reale.

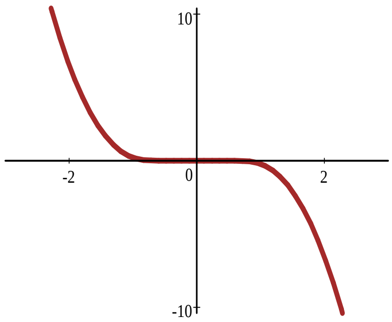
a-b. Calcolo e segno della derivata seconda:

$$f''(x) = -24\frac{x^7}{1+x^6} + 18\frac{x^{13}}{(1+x^6)^2} = -6x^7\frac{4+x^6}{(1+x^6)^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; -x^7 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0.$$

	0	
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Quindi f risulta convessa su $(-\infty, 0)$ e concava su $(0, +\infty)$. In $x = 0$ presenta un punto di flesso.

Grafico di $f(x) = \arctan(x^3) - x^3$



ESEMPIO 7.4

$$\boxed{f(x) = 2x + \frac{1}{x}.}$$

1. $E(f)$ è dato da $x \neq 0$.

2. Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to-\infty} 2x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} 2x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-} 2x + \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} 2x + \frac{1}{x} = +\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim 2x$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, quindi potrebbero esserci asintoti obliqui. Occorre quindi calcolare:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2x + \frac{1}{x}\right) - 2x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(2x + \frac{1}{x}\right) - 2x = 0.$$

Di conseguenza, la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo per f per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2} > 0 \iff \begin{cases} 2x^2 - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{o} \quad x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ●		0 ○		$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ●	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

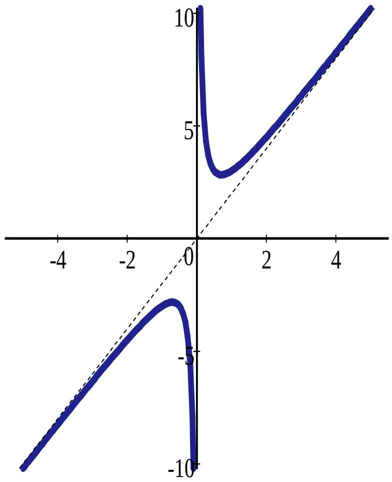
Quindi f è crescente in $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ed in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ed in $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo (relativo) e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo (relativo).

a-b. Calcolo e segno di f'':

$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0.$

Quindi f è concava in $(-\infty, 0)$ e convessa in $(0, +\infty)$. Non ci sono flessi.

Grafico di $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$



Osservazione: Le funzioni studiate negli ultimi due esempi sono dispari, quindi i loro grafici sono simmetrici rispetto all'origine. Si sarebbe potuto quindi limitare il loro studio diretto restringendosi al semiasse positivo e poi estendere per simmetria.

ESEMPIO 7.5

$$\boxed{f(x) = e^{\sqrt{x^3 - x}} - \sqrt{x^3 - x}.}$$

1. Per determinare l'insieme di definizione di f dobbiamo imporre che la radice quadrata sia definita, cioè che:

$x^3 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 - 1) \geq 0$, il che accade quando x e $(x^2 - 1)$ sono concordi, cioè:

		-1	0	1
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x^2 - 1)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x^3 - x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

In conclusione $E(f) = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

2. Limiti agli estremi: notiamo innanzitutto che f è definita e continua negli estremi $-1, 0, 1$ dell'insieme di definizione, quindi $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 1 = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$. L'unico limite che bisogna effettivamente calcolare è:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x^3 - x}} - \sqrt{x^3 - x} = +\infty,$$

in quanto nel confronto tra infiniti per $x \to +\infty$ prevale l'esponenziale e $f(x) \sim e^{\sqrt{x^3-x}}$, il che ci dice anche che non ci sono asintoti obliqui.

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = e^{\sqrt{x^3-x}} \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}} - \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}} = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}} \left(e^{\sqrt{x^3-x}} - 1 \right).$$

Studiamo separatamente i segni dei due fattori:

$\dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}} > 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 1 > 0$ con $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, cioè quando x soddisfa le due condizioni:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ -1 < x < 0, \;\; x > 1 \end{cases}$$

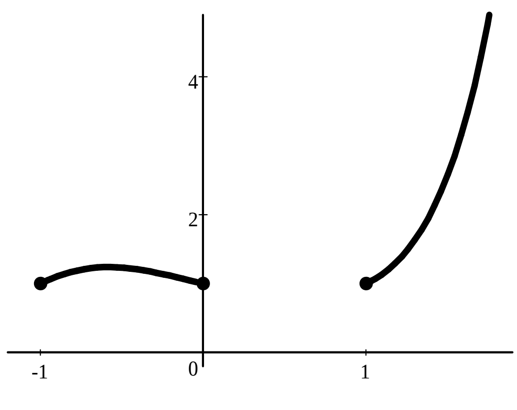
quindi per $-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \;\; x > 1$.

Per quanto riguarda il secondo fattore, notiamo che $e^{\sqrt{x^3-x}} - 1 > 0$ se e solo se $\sqrt{x^3 - x} > 0$, il che è sempre verificato per $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ (per tali valori di x il radicando è definito e positivo). Il conclusione il segno della derivata è determinato dal segno del primo fattore, quindi avremo che

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \;\; x > 1.$$

Concludendo, f è strettamente crescente in $(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ed in $(1, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente in $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di massimo (relativo), mentre $x = -1, 0, 1$ sono punti di minimo (assoluti).

Grafico di $f(x) = e^{\sqrt{x^3-x}} - \sqrt{x^3 - x}$



ESEMPIO 7.6

Discutere il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - k = 0,$$

al variare di k reale.

In questo caso abbiamo da risolvere un problema riguardante le soluzioni di un'equazione dipendente dal parametro reale k. Per risolverlo, possiamo dapprima interpretare l'equazione data come l'equazione risolutiva del sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \\ y = k \end{cases}.$$

Questo sistema rappresenta analiticamente l'intersezione tra il grafico della funzione data da $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ e la retta di equazione $y = k$, che al variare di k in $\mathbb{R}$, descrive la famiglia di rette parallele all'asse x. Il numero dei punti appartenenti a tale intersezione corrisponde al numero delle soluzioni dell'equazione data, mentre le corrispondenti ascisse sono le effettive soluzioni, la cui posizione sull'asse x ci permette di conoscerne il segno, anche se non esattamente il valore. Non ci resta quindi che iniziare a studiare la funzione $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, in modo da disegnarne il grafico.

1. $E(f)$ è dato da tutto $\mathbb{R}$.

2. Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^4 = +\infty \qquad \text{(confronto tra infiniti in cui prevale } 3x^4\text{)}$$

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x > 0 \iff 12x(x-1)(x-3) > 0 \iff 0 < x < 1 \quad \text{o} \quad x > 3$$

		0		1		3	
$f'(x)$	$-$	•	$+$	•	$-$	•	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Quindi f è crescente in $(0, 1)$ ed in $(3, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(1, 3)$.
Avremo quindi un punto di massimo (relativo) in $x = 1$ e punti di minimo in $x = 0$ ed in $x = 3$. In questo caso, dovendo intersecare il grafico con la famiglia di rette orizzontali $y = k$, ci è utile conoscere i valori della funzione in tali punti.

$f(1) = 5 \qquad f(0) = 0 \qquad f(3) = 3 \times 3^4 - 16 \times 3^3 + 18 \times 3^2 = 243 - 432 + 162 = -27$

Abbiamo quindi che in $x = 3$ vi è un punto di minimo assoluto di valore -27.

Per i nostri scopi, non ci serve sapere nulla sulla convessità, né sugli asintoti obliqui.
Le informazioni che abbiamo su f sono sufficienti per concludere che ci saranno i seguenti casi, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

per $k < -27$, nessuna soluzione (retta al di sotto del grafico);

per $k = -27$, una soluzione positiva ($x = 3$)(retta tangente al grafico nel punto corrispondente al minimo $(3, -27)$);

per $-27 < k < 0$, due soluzioni positive (retta secante il grafico)([1]);

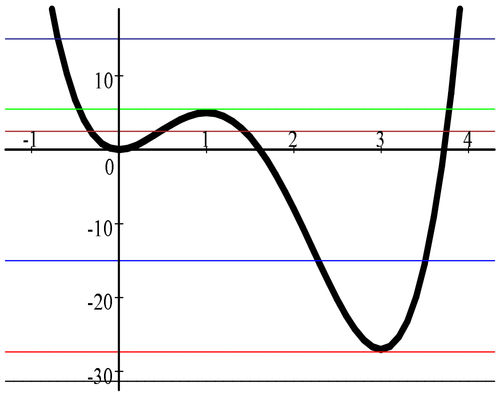
per $k = 0$, tre soluzioni, di cui una nulla e due positive (retta tangente al grafico nel punto corrispondente al minimo relativo $(0, 0)$);

per $0 < k < 5$, quattro soluzioni, di cui una negativa e tre positive (retta secante il grafico);

Per $k = 5$, tre soluzioni, di cui una negativa e due positive (retta tangente al grafico nel punto corrispondente al massimo relativo $(1, 5)$).

Per $k > 5$, due soluzioni, di cui una negativa ed una positiva (retta secante il grafico).

La situazione è visibile nel grafico seguente:



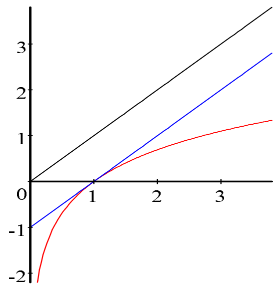
ESEMPIO 7.7

Vogliamo studiare alcune disequazioni non elementarmente risolubili, iniziando da

$$x - \log x > 0.$$

Dopo aver stabilito il campo di esistenza, che è $(0, +\infty)$, possiamo interpretare questa disequazione come il confronto tra le ordinate dei punti di uguale ascissa dei grafici delle due funzioni elementari, $f(x) = x$ e $g(x) = \log x$ e cercare di trovare le soluzioni attraverso i grafici (*confronto grafico*). In questo caso è abbastanza semplice, in quanto sappiamo che, per $0 < x < 1$, $\log x < 0$, mentre da 1 in poi è anch'esso positivo. Starà sopra o sotto la retta? Poichè in $x = 1$ il grafico ha tangente $y = f'(1)(x-1) = x - 1$ e la funzione è concava, il suo grafico sta al di sotto di tale retta, e quindi sotto la retta di equazione $y = x$. In conclusione, le soluzioni della diseguaglianza sono date da $(0, +\infty)$.

[1] Utilizzando il teorema degli zeri e le informazioni a disposizione sulla monotonia di f, queste soluzioni, come le successive, si possono "localizzare", nel senso di trovare, per ciascuna di esse, un intervallo a cui appartiene (ed a cui non appartiene nessun'altra soluzione). Per esempio, in questo caso, le due soluzioni x_1, x_2 determinate sono tali che $1 < x_1 < 3$ e $x_2 > 3$.

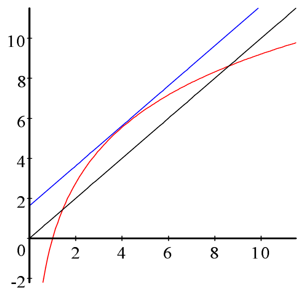


Confronto tra x e $\log x$

Diversa la situazione se dobbiamo studiare, sempre con confronto grafico

$$x > 4 \log x.$$

In questo caso, l'unico punto del grafico con tangente parallela a $y = x$ corrisponde a $x_0 = 4$ (infatti $4\dfrac{1}{x_0} = 1 \;\Leftrightarrow\; x_0 = 4$) ed in tale punto la tangente ha equazione $y = x - 4 + 4\log 4 = x + 4(\log 4 - 1)$. Essendo $(\log 4 - 1) > 0$, tale retta sta sopra $y = x$ ed il grafico concavo di $f(x) = 4\log x$ incontra $y = x$ in 2 punti α e β, con $\alpha < 4 < \beta$.



Confronto tra x e $4 \log x$

Alternativamente, si può procedere studiando la funzione

$$f(x) = x - 4\log x$$

in modo da determinarne il segno.

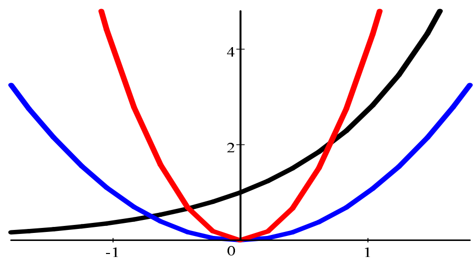
ESEMPIO 7.8

Studiamo ora con confronto grafico una disequazione dipendente da un parametro:

$$e^x - kx^2 > 0.$$

Qui dobbiamo confrontare il grafico di $f(x) = e^x$ con le parabole di vertice l'origine. La prima banale osservazione è che, se $k < 0$, la parabola è rivolta verso il basso e, avendo vertice l'origine, sta tutta sotto l'asse x. Di conseguenza, per $k \leq 0$, $e^x > kx^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Per $k > 0$, la parabola è rivolta verso l'alto e il valore di k dà una misura dell'apertura della parabola stessa (più k è piccolo, più la parabola è aperta). Ci dovremo quindi aspettare diversi casi, a seconda del valore di k :



Sicuramente, ogni parabola con un $k > 0$ interseca il grafico di e^x in un punto del II quadrante, corrispondente ad una ascissa $x = \alpha < 0$. Invece, nel I quadrante, se una di queste parabole interseca il grafico di e^x in un punto di ascissa $\beta > 0$, lo deve poi intersecare in almeno un altro punto di ascissa $\gamma \geq \beta$. Infatti, pur essendo entrambe convesse su tutto $\mathbb{R}$, e^x ha un ordine di infinito superiore a kx^2 per $x \to +\infty$ e quindi, da un certo punto in poi, il suo grafico si troverà definitivamente sopra la parabola. Per distinguere i vari casi, dobbiamo dapprima vedere se una tra queste parabole è tangente al grafico di e^x, distinguendo poi tra quelle più aperte (che non avranno quindi intersezioni positive) e quelle meno aperte, che avranno 2 intersezioni positive.
Affinchè i grafici di 2 funzioni siano tangenti, devono avere una tangente comune e quindi ci serve un punto $P = (x_0, y_0)$ appartenente ad entrambi i grafici in cui le 2 tangenti abbiano lo stesso coefficiente angolare. Abbiamo allora un sistema in 2 incognite (x_0 e $k > 0$) con due equazioni:

$$\begin{cases} e^{x_0} = kx_0^2 \\ e^{x_0} = 2kx_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2kx_0 = kx_0^2 \\ e^{x_0} = 2kx_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0\ (x_0 \ -2) = 0 \\ e^{x_0} = 2kx_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ e^2 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ k = \frac{e^2}{4} \end{cases}.$$

Abbiamo allora che per $k = \frac{e^2}{4}$ la parabola risulta tangente al grafico di e^x. In conclusione la disequazione avrà le seguenti soluzioni, al variare di k :

$k \leq 0$	ogni $x \in \mathbb{R}$
$0 < k < \frac{e^2}{4}$	$x > \alpha$, con $\alpha < 0$
$k = \frac{e^2}{4}$	$x > \alpha$, con $\alpha < 0$ e $x \neq \beta > 0$
$k > \frac{e^2}{4}$	$\alpha < x < \beta$, $x > \gamma$, con $\alpha < 0 < \beta < \gamma$